

G. STRAPPA

APPLICAZIONI
DI SCIENZA
DELLE COSTRUZIONI

PER LE FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

BULZONI EDITORE

PREFAZIONE

Il problema del rapporto tra progetto come programma formale e le sue componenti tecniche è da lungo tempo tema di accese polemiche nelle facoltà di Architettura.

Di fatto il problema didattico della sintesi progettuale riflette una condizione strutturale in cui si è venuta a collocare l'architettura dopo la rivoluzione industriale: la settorializzazione delle componenti disciplinari come rispecchiamento del processo più generale di divisione del lavoro nelle società a tecnologia avanzata. La legge dell'efficienza produttiva ha relegato l'architetto in un ruolo difficilmente definibile all'interno della produzione edilizia: da una parte la complessità dell'elaborazione progettuale ha condotto alla artificiosa schematizzazione del processo nelle diverse fasi (quasi autonome) riscontrabili nella corrente normativa (piano urbanistico, planivolumetrico, progetto di massima, progetto esecutivo, calcoli statici) dall'altro la stretta interazione tra i diversi momenti della progettazione porterebbe naturalmente ad indirizzare la didattica verso la formazione di un tecnico-politico in grado di controllare il processo di formazione del progetto, pur delegando ad esperti del settore l'analisi specifica delle fasi più specialistiche.

E proprio alla divisione della progettazione « per fasi » rispondono gli attuali insegnamenti nelle facoltà di Architettura, dove ogni settore rivendica gelosamente un'artificiale autonomia il cui costo è la frantumazione dell'insegnamento in corsi slegati dalla realtà progettuale proprio perché isolano, nel progetto, momenti che non possono essere scissi.

Tra gli insegnamenti più autonomi si collocano proprio quelle materie tecniche che più avrebbero necessità, in quanto metodologicamente meno omogenee col resto degli insegnamenti, di essere finalizzate ed integrate.

Sarebbe velleitario tentare di risolvere in sede didattica queste contraddizioni, proprio perché mutate dai processi produttivi e quindi strutturali della situazione generale in cui il fare architettura si colloca. Tuttavia esiste indubbiamente uno spazio per sperimentare un nuovo

tipo di rapporto tra teoria e prassi in questi insegnamenti delle facoltà di Architettura, cominciando col rivedere i programmi per trasformarli, da trasposizioni riduttive di modelli ereditati da altre discipline, in strumenti realisticamente finalizzabili alla progettazione.

Questo lavoro costituisce un tentativo nella direzione di legare alla prassi del fare architettura gli studi di Scienza delle Costruzioni: pur riferendosi agli attuali programmi didattici le applicazioni studiate nelle pagine che seguono cercano infatti di tenere costantemente presente il ruolo di questo insegnamento nel contesto più generale della progettazione.

Roma 1976

Giuseppe Strappa

INDICE

PARTE PRIMA

ISOSTATICA

	pag.
Generalità	9
Caratteristiche di sollecitazione	12
Esercizi	15
Relazioni analitiche tra i diagrammi	23
Esercizi	26
Vincoli esterni e vincoli interni	32
Esercizi	35
Dimensionamento delle sezioni	73
Esercizi	74

PARTE SECONDA

STATI TENSIONALI SU PIANI INCLINATI

Generalità	85
Cerchio di Mohr	86
Costruzione pratica del cerchio di Mohr	90
Esercizi	92

PARTE TERZA

SISTEMI IPERSTATICI

Generalità	107
Esercizi	110
Equazione della linea elastica	111
Esercizi	112
Esercizi sull'applicazione dell'equazione dei 4 momenti	117
Esercizi sulle applicazioni dei teoremi sul lavoro di deformazione	123
Esercizi sulle dilatazioni termiche	148

Parte I ISOSTATICA

Generalità

La Scienza delle Costruzioni si occupa di una serie di problemi che riguardano la stabilità, le sollecitazioni e la resistenza dei materiali nelle strutture. Nell'affrontare il problema della stabilità, tornerà utile riassumere brevemente alcuni fondamentali concetti riguardanti la statica dei corpi rigidi.

Un corpo nello spazio può compiere dei movimenti riconducibili a spostamenti lungo gli assi x , y , z , di un sistema di riferimento cartesiano, e a rotazioni intorno a tali assi (fig. 1).

Perché tale corpo sia in equilibrio bisogna che tali movimenti non avvengano, e cioè bisogna che la risultante delle forze agenti sul corpo sia nulla ($R = O$), e che il momento risultante sia pure nullo ($Mr = O$). Tali condizioni di equilibrio possono essere anche scritte attraverso le componenti delle forze lungo gli assi e le componenti dei momenti intorno ad essi

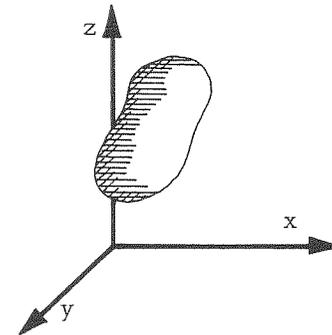


fig. 1

$$R = O \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases} \quad Mr = O \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

Queste sei condizioni di equilibrio sono dette equazioni cardinali della statica (1). Tuttavia in Scienza delle Costruzioni molte strutture sono

(1) V. O. BELLUZZI, Scienza delle Costruzioni, vol. I, pag. 41, par. 47 e 48.

schematizzabili su un piano (supponendo trascurabili le azioni ortogonali ad esso) e allora le equazioni si riducono a tre, poiché non compaiono più (considerando come piano di riferimento il piano x, y) le forze lungo l'asse z né i momenti intorno agli assi x ed y :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

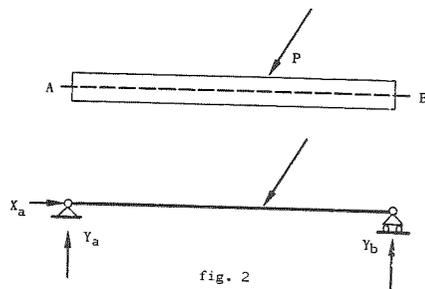
Di tali equazioni ci si servirà per determinare le condizioni di equilibrio di una struttura. Da esse risulta chiaro che se un corpo (ad esempio una trave) è soggetto a un sistema di forze attive la cui risultante è diversa da zero, come avviene nella maggioranza dei casi, si rendono necessari degli strumenti che sviluppino forze tali da assicurare l'equilibrio annullando risultante e momento risultante. Tali strumenti sono detti *vincoli* e si differenziano, a seconda dei movimenti che possono impedire, in vincoli di primo tipo (carrello, pendolo o biella etc.), di secondo tipo (cerniera, doppio pendolo etc.) e di terzo tipo (incastro). Corpo e vincoli formano un sistema statico, che viene studiato attraverso opportune schematizzazioni e ipotesi semplificative.

Poiché nel piano ogni corpo può compiere tre movimenti (due traslazioni e una rotazione), tali vincoli debbono essere in grado di impedirli. Se il numero e il tipo di vincoli non impediscono tutti i movimenti il sistema si dice *labile*, se sono strettamente sufficienti *isostatico*, se sono in numero sovrabbondante *iperstatico*.

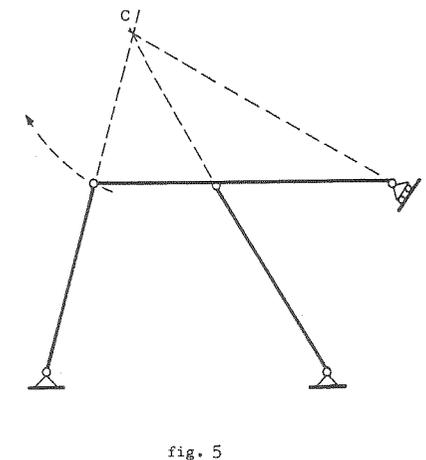
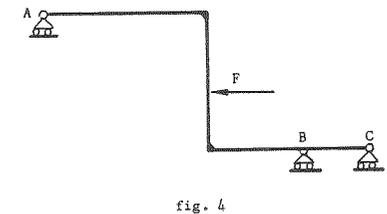
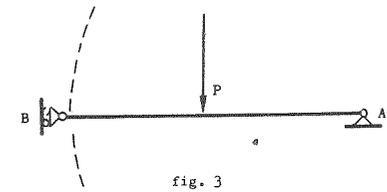
I sistemi labili non interessano questo studio in quanto non usati nelle strutture. Ci occuperemo invece in questa prima parte dei sistemi isostatici. Per tali sistemi (schematizzati attraverso segmenti o curve che rappresentano la fibra media dei corpi in esame, e cioè il luogo geometrico dei baricentri delle loro sezioni), si fanno le ipotesi semplificative di completa indeformabilità dei vincoli (che si suppongono anche bilaterali e privi di attrito) e di totale rigidità di aste e travi. Questo perché le deformazioni interessano solo per quel che riguarda lo spostamento del punto di applicazione delle forze, e sono in genere di entità tale da non modificare in modo rilevante lo schema statico.

Una struttura isostatica è sempre staticamente determinata in quanto le equazioni cardinali della statica sono sufficienti a determinare le reazioni dei suoi vincoli.

Data ad esempio una trave (fig. 2), essa ha tre possibilità di movimento sul piano, e cioè ha tre gradi di libertà. Se mettiamo sullo estremo A una cerniera, essa è in grado di sviluppare due componenti di reazione (Y_a e X_a) tali da impedire qualsiasi traslazione. Se poi mettiamo in B un carrello il sistema



diventa isostatico grazie alla reazione Y_b che esso può sviluppare e che impedisce le rotazioni intorno a un punto qualsiasi del piano. Tale sistema presenta pertanto tre incognite (Y_a, X_a e Y_b) per determinare le quali possiamo scrivere tre equazioni di equilibrio (le equazioni cardinali della statica nel piano), ed è quindi staticamente determinato. Si noti che può essere pericoloso determinare se un sistema è isostatico o meno unicamente facendo il conto dei gradi di libertà e dei gradi di vincolo. Bisogna infatti che oltre ad essere nel numero giusto, i vincoli siano pure nella posizione opportuna, come si deduce osservando i sistemi in figura 3, 4 e 5 (labile il primo in quanto è possibile una rotazione infinitesima intorno ad A , labile il secondo perché non sono impedito le traslazioni orizzontali e labile infine il terzo in quanto le direzioni delle reazioni si incontrano nel punto C (cerniera ideale) che diviene centro istantaneo di rotazione (2). Il discorso sui vincoli verrà ripreso dopo alcuni esercizi che chiariscono l'argomento, esercizi in cui si determinano le reazioni vincolari e i diagrammi di sollecitazione di alcuni semplici sistemi isostatici. Si ricorda che i diagrammi di sollecitazione rappresentano le condizioni di sollecitazione (sforzo normale, taglio e momento flettente) in ogni sezione della struttura e possono essere tracciati per punti (calcolando il valore della sollecitazione in molti punti della struttura, riportandoli in una scala opportuna e unendoli con una curva) o più razionalmente espri-



(2) In realtà anche il caso di fig. 4 è riconducibile alla rotazione intorno a una cerniera ideale che si troverebbe però in questo caso all'infinito (punto di incontro delle direzioni di reazione dei carrelli). Una rotazione intorno a un punto all'infinito corrisponde infatti a una traslazione.

mendo (dove necessario) la legge di variazione delle sollecitazioni nei tratti del sistema in cui la variazione è continua (3).

Caratteristiche di sollecitazione

Consideriamo l'equilibrio di un corpo, oltre che nel suo insieme, in tutte le possibili parti in cui può essere diviso. E' chiaro infatti che se un corpo è in equilibrio, dovranno essere in equilibrio anche eventuali porzioni di esso considerate singolarmente. Riferiamoci per semplicità alla trave, intendendo per trave un elemento strutturale in cui una dimensione prevale sulle altre due e che viene schematizzato attraverso una linea (generalmente giacente su un piano), luogo dei baricentri delle sezioni. Tale linea viene detta fibra media della trave.

Ora, se consideriamo la trave in figura 1 essa è chiaramente in equilibrio sotto l'azione della forza attiva F e delle reazioni vincolari $F/2$. Ma se essa è in equilibrio, lo dovrà anche essere la parte di trave AC , di lunghezza b , in figura 2.

Questo significa che nella sezione C si dovranno sviluppare forze tali da equilibrare le forze R_a ed F alla sua sinistra. Trasportiamo allora la forza R_b dal punto B in C , agguaggiando un momento di trasporto $M_c = R_b \cdot d$. Il sistema di forze che agisce sulla sezione C (la forza R_b e il momento M_c), si dice risultante relativa alla sezione C e mantiene in equilibrio la parte di trave AC in quanto abbiamo sostituito ad R_b un sistema di forze equivalente. Sulla sezione C avremo allora una forza diretta verticalmente all'asse della trave ($R_b = F/2$) detta forza di taglio, e un momento $M_c = R_b \cdot d$ detto momento flettente (fig. 2). Se consideriamo allora un concio di trave in C (fig. 3) si avrà equilibrio tra forze a sinistra del concio e forze a destra.

Se la lunghezza del concio è molto piccola le forze a sinistra e a destra del concio saranno uguali e contrarie. Il valore delle forze agenti sul concio rappresenta lo stato di sollecitazione relativo al concio stesso. In genere si avranno anche sforzi in direzione normale alla se-

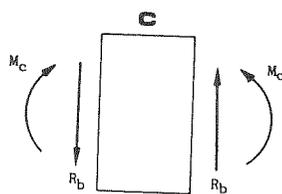
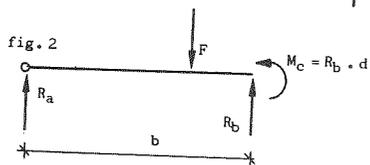
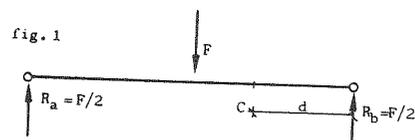


fig. 3

zione, e quindi, nel caso più generale, la sezione sarà sollecitata da sforzi di taglio, sforzi normali e momenti flettenti (e più raramente momenti torcenti). Per convenzione si intendono positivi gli sforzi normali di trazione, i momenti flettenti che tendono le fibre inferiori delle travi, e gli sforzi di taglio in cui la forza a sinistra del concio è diretta verso l'alto.

Diagrammi di sollecitazione

Fissato un sistema di riferimento ortogonale con l'asse delle ascisse coincidente con l'orizzontale, si riportano sulle ordinate le funzioni di N (sforzo normale), di T (taglio), ed M (momento flettente), in una scala di riferimento arbitraria, ottenendo i diagrammi di sollecitazione. Tali diagrammi sono in genere funzioni discontinue e si ottengono facendo la risultante relativa ad una sezione generica distante x dall'origine.

Studiando ad esempio la trave in fig. 4.

Le reazioni vincolari ($R_a = R_b = F/2$) sono verticali come il carico F e quindi è assente lo sforzo normale. Per quello che riguarda il taglio, esso sarà costante nel tratto AC (C è il punto di applicazione della forza agente, e sarà positivo per le convenzioni fatte sul segno di T). Nel tratto successivo esso sarà pure costante perché la risultante relativa alle sezioni comprese tra C e B ha sempre come componente verticale $F/2 - F = -F/2$ (fig. 5).

Le funzioni del taglio sono dunque $T_x = F/2$ nel tratto AC e $T_x = -F/2$ in CB .

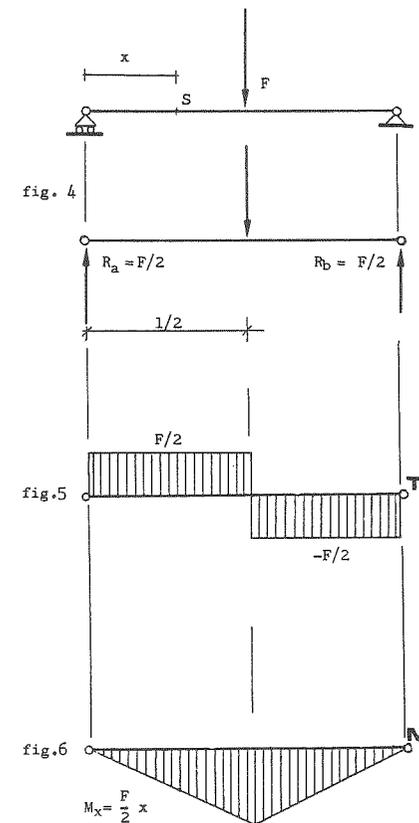
Scriviamo ora la funzione del momento flettente nel tratto AC . Se facciamo il momento rispetto ad una generica sezione S distante x da A , avremo (fig. 6)

$$M_s = F/2 \cdot x$$

Il diagramma è cioè costituito da una retta passante per A e di coefficiente angolare $F/2$. Il riferimento questa volta ha la direzione positiva delle ordinate verso il basso, perché il diagramma va disegnato dalla parte delle fibre tese. Nel tratto successivo il momento varrà

$$M_s = F/2 \cdot x - F(x - 1/2)$$

perché anche la forza F applicata in C da contributo al momento.



(3) O. BELLUZZI, Scienza delle Costruzioni, Vol. I, pag. 9, par. II e pag. 285, par. 196.

Come si vede le sollecitazioni vengono calcolate a trave indeformata, in quanto l'inflexione della trave altera in modo trascurabile la posizione reciproca delle forze.

Troviamo ora i diagrammi di sollecitazione in una trave con carico ripartito p (fig. 7).

Il procedimento è sempre lo stesso: trovate le reazioni vincolari ($R_a = R_b = pl/2$) si fa la risultante relativa ad una sezione generica s distante x da A e si tracciano i diagrammi relativi ad ogni componente della risultante (N, T, M). Lo sforzo di taglio sarà dato dalla reazione $R_a = pl/2$ meno il contributo dovuto al carico ripartito sul tratto x (che vale $p \cdot x$), (fig. 8).

La funzione del taglio sarà allora

$$T_x = \frac{pl}{2} - px$$

che è la funzione di una retta che si annulla per $x = l/2$, e cioè il taglio è nullo in mezzeria.

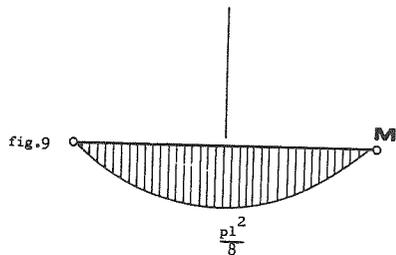
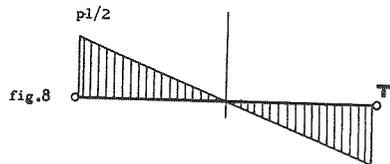
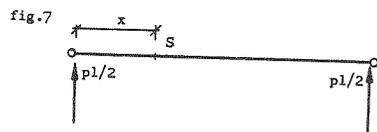
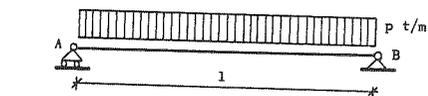
Il valore del momento flettente nella stessa sezione generica S sarà la somma dei momenti generati dalla reazione $pl/2$ e dalla parte di carico che insiste sul tratto di lunghezza x , cioè dalla forza px . Immaginando di concentrare la forza px nel baricentro del corrispondente diagramma di carico (distante $x/2$ dalla sezione S), si avrà la funzione del momento flettente

$$M_x = \frac{pl}{2}x - px \cdot \frac{x}{2}$$

cioè

$$M_x = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

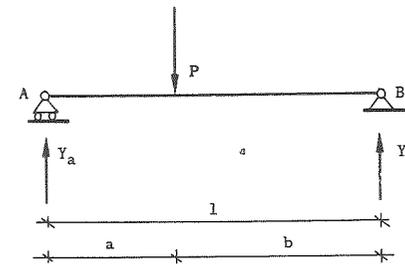
(fig. 9).



Esercizio 1

Si vogliono trovare le reazioni vincolari R_a (di componenti Y_a e X_a) e R_b (di componenti Y_b e X_b) e i diagrammi delle sollecitazioni per una trave vincolata in A da un carrello e in B da una cerniera, e sollecitata da una forza verticale P .

La trave è isostatica perché il numero dei vincoli è strettamente sufficiente a impedire qualsiasi traslazione o rotazione.



REAZIONI VINCOLARI

Dalle equazioni di equilibrio si ricava

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma X = 0 \text{ da cui } X_b = 0 \\ \Sigma Y = 0 \text{ da cui } Y_a + Y_b - P = 0 \\ \Sigma M = 0; M_b = 0 \text{ da cui } Y_a \cdot l - P \cdot b = 0 \quad (1) \end{array} \right. \quad \text{(Calcolando i momenti rispetto a B)}$$

Dall'ultima equazione si ricava $Y_a = \frac{Pb}{l}$, e sostituendo nella seconda si ha $Y_b + \frac{Pb}{l} - P = 0$ da cui $Y_b = P - \frac{Pb}{l} = \frac{P(l-b)}{l}$ e poiché $l-b = a$ si ha $Y_b = \frac{Pa}{l}$. Poiché, essendo il carico P verticale, le reazioni saranno a loro volta verticali, si avrà:

$$R_a = Y_a = \frac{Pb}{l}$$

$$R_b = Y_b = \frac{Pa}{l}$$

Che sono i risultati cercati.

Bisogna ora determinare i diagrammi delle sollecitazioni.

(1) Avendo assunto come positiva la rotazione destrogira.

DIAGRAMMI DELLE SOLLECITAZIONI

Si sostituiscono ai vincoli le corrispondenti reazioni e si studiano gli effetti che tali forze, insieme alle forze attive (in questo caso P) provocano sulla trave.

SFORZO NORMALE

Non esistendo forze parallele all'asse della trave non si hanno sollecitazioni di trazione o compressione. $N = 0$.

TAGLIO

Il taglio ha valore positivo nel tratto a e negativo nel tratto b (1). Nel primo tratto il taglio ha il valore della reazione R_a , cioè si ha

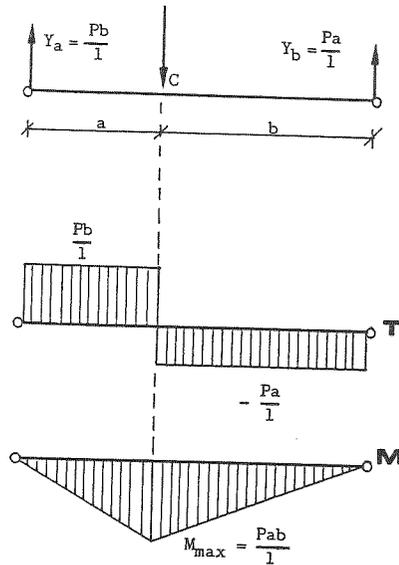
$$T_a = \frac{Pb}{l}$$

Nel tratto b il taglio vale

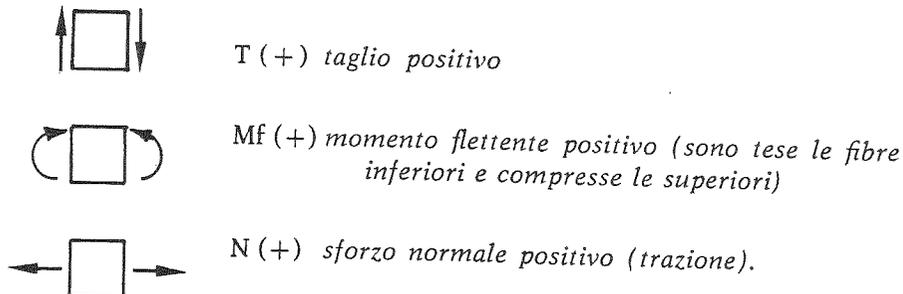
$$T_b = \frac{Pb}{l} - P \quad T_b = -\frac{Pa}{l} \quad (\text{il taglio assume cioè il valore di } -R_b)$$

MOMENTO FLETTENTE

In una generica sezione S il momento flettente vale $M_s = R_b \cdot x$. Nel tratto a $R = R_a$, mentre x rappresenta la distanza di S da A , nel tratto b



(1) Si ricorda che per convenzione si assumono come segni delle sollecitazioni:



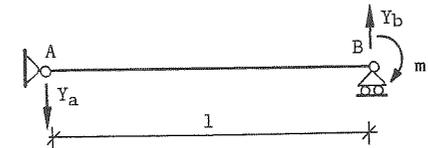
$R = R_b$, mentre x rappresenta la distanza di S da B . Il Mf varia quindi con legge lineare e assume valore massimo in C . Basta quindi calcolare il momento nel punto C .

$$R_a \cdot a = \frac{Pab}{l} = R_b \cdot b$$

Si nota dal diagramma che il momento (positivo) è tutto nella parte inferiore, sono cioè tese le fibre inferiori della trave, come si può intuitivamente dedurre dalla deformazione che P tende a provocare.

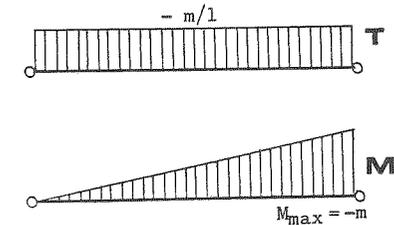
Esercizio 2

Calcolare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni in una trave vincolata in A da una cerniera e in B da un appoggio semplice, e sollecitata da una coppia di momento m .



REAZIONI VINCOLARI

Poiché la coppia di momento m tende ad imprimere alla trave una rotazione destrogira si nota intuitivamente che le reazioni dovranno imprimere alla trave una rotazione levogira che equilibri la precedente, cioè una coppia di braccio l e formata da vettori di direzione ortogonale alla trave (perché il carrello B può reagire solo con reazioni normali al piano d'appoggio). Bisogna ora verificare queste considerazioni intuitive con le equazioni di equilibrio e determinare i valori di R_a e R_b .



$$\begin{array}{l|l|l} \Sigma X = 0 & \Sigma M_a = 0 & \Sigma Y = 0 \\ X_a = 0 & m - Y_b l = 0 \quad (1) & Y_b - Y_a = 0 \\ \text{(non esiste)} & Y_b = \frac{m}{l} & Y_a = \frac{m}{l} \\ \text{sforzo normale)} & & \end{array}$$

TAGLIO

Poiché entrambe le reazioni hanno uguale valore $\frac{m}{l}$, direzione ortogonale alla trave, verso opposto, non intervenendo altre forze oltre la coppia, il valore del taglio sarà costante lungo tutta la trave e varrà $-\frac{m}{l}$ (negativo per le convenzioni accennate).

(1) Avendo assunto come positivo il verso di m .

MOMENTO FLETTENTE

Il momento flettente in una generica sezione S vale:

$$M_s = Y_a \cdot x = - \frac{m}{l} x \quad (\text{dove } x \text{ rappresenta la distanza } \overline{AS})$$

La legge di variazione del M_f è lineare lungo tutta la trave, e il momento sarà massimo nella sezione B dove varrà:

$$M_b = - \frac{m}{l} x = -m \quad (\text{perché in } B \text{ si ha } x = l)$$

Si noti che il diagramma dei momenti va disegnato nella parte superiore della trave (dove sono cioè le fibre tese) in quanto i momenti sono tutti negativi.

Esercizio 3

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni della mensola in figura sollecitata da carichi verticali e da una coppia levo-gira applicata nel punto C .

REAZIONI VINCOLARI

Dalle equazioni di equilibrio si ricava (1):

$$\Sigma X = 0 \quad \text{da cui} \\ X_a = 0$$

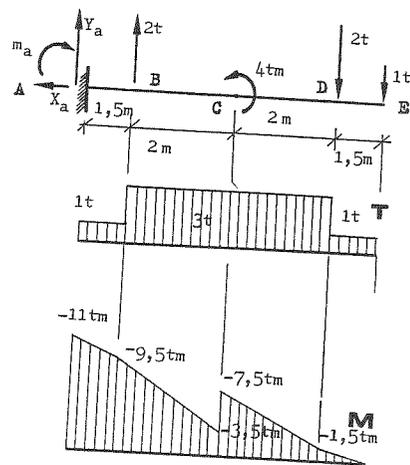
$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{da cui} \\ m_a - 2t \cdot 1,5m - 4tm + 2t \cdot 5,5m + 1t \cdot 7m = 0 \\ m_a = 11tm$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{da cui} \\ Y_a - 2t + 2t + 1t = 0 \\ Y_a = 1t$$

TAGLIO

Nel tratto AB il taglio ha il valore della reazione Y_a . Nel tratto BC il taglio è $Y_a + 2t = 3t$; poiché la coppia in C non influenza le sollecitazioni di taglio, anche CD sarà sollecitato da un taglio positivo pari a $3t$. Nel tratto DE il taglio vale $3t - 2t = 1t$. Si può verificare che anche partendo da destra, dall'estremo E , si ottengono gli stessi valori.

(1) Nel caso dell'incastro (vincolo triplo) le reazioni dovranno opporsi, oltre che alle forze parallele e normali alla trave, anche alla rotazione che le forze attive tendono ad imprimere alla mensola con una coppia m_a di momento uguale e contrario a quello delle forze attive rispetto ad A . (Vedi Belluzzi, op. cit., vol. 1, pag. 39).



tazioni di taglio, anche CD sarà sollecitato da un taglio positivo pari a $3t$. Nel tratto DE il taglio vale $3t - 2t = 1t$. Si può verificare che anche partendo da destra, dall'estremo E , si ottengono gli stessi valori.

SFORZO NORMALE

Non esistendo forze esterne parallele all'asse della trave si ha $N = 0$ su tutta la mensola.

MOMENTO FLETTENTE

Partiamo dall'estremo libero E . Il M_f rispetto ad E è nullo, come si può verificare sommando i momenti di tutte le forze rispetto a tale punto. Se così non fosse il sistema non starebbe in equilibrio perché in E non ci sono vincoli capaci di reagire ad un eventuale M_f . In D il M_f vale $1t \cdot 1,5m = 1,5tm$. In C si ha $M_f = 1t \cdot 3,5m + 2t \cdot 2m = 7,5tm$. Tale valore si raggiunge immediatamente prima di C . Immediatamente dopo varrà $M_f = -4 + 7,5 = 3,5tm$, a causa della coppia applicata in C . In B si ha poi $M_f = 1t \cdot 5,5m + 2t \cdot 4m - 4tm = 9,5tm$. Tali valori vanno assunti col segno negativo in quanto tendono le fibre superiori della trave (v. figura). In A si è già trovato che $M_f = m_a$ vale $11tm$, nel calcolo delle reazioni dei vincoli. Si può anche trovare come somma dei momenti delle forze attive rispetto ad A , ma tale operazione non differisce da quella del computo della reazione m_a .

Esercizio 4

Calcolare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni della trave in figura.

REAZIONI

Applicando le equazioni della statica si ottiene:

$$\Sigma X = 0 \quad \text{da cui}$$

$$X_a - F = 0$$

$$X_a = 3t$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{da cui}$$

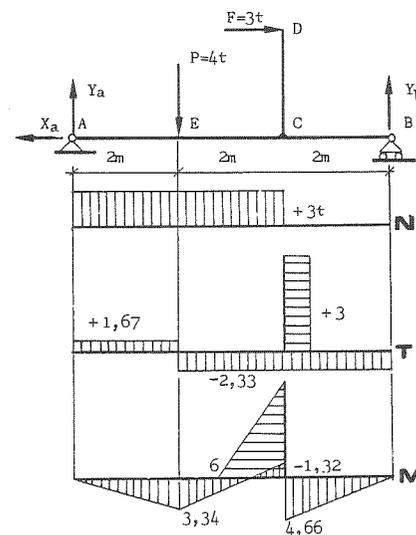
$$Y_b \cdot 6 - 3t \cdot 2 - 4t \cdot 2 = 0$$

$$Y_b = \frac{7}{3}t = 2,33t$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{da cui}$$

$$Y_a - 4t + 2,33t = 0$$

$$Y_a = 1,67t$$



SFORZO NORMALE

Le uniche forze parallele all'asse della trave sono la reazione X_a e la forza F che agiscono sul settore di trave AC . Si avrà quindi uno sforzo normale di 3 t nel tratto AC (positivo perché di trazione), mentre nel tratto CB e DC , non agiscono forze parallele all'asse delle parti di trave, quindi tali settori sono scarichi per quanto riguarda lo sforzo normale.

SFORZO DI TAGLIO

Nel tratto AE sforzo positivo pari a Y_a , cioè 1,67 t. Nel tratto EC il taglio vale $Y_a - P = -2,33$ t. Nel tratto CB il taglio vale $Y_b = 2,33$. Nel tratto DC vale $F = 3$ t. Il fatto che nel tratto DC il taglio sia positivo si deduce dal tipo di slittamento ($\uparrow \downarrow$) che la forza F e la reazione X_a spostabile in C tendono ad imprimere alle sezioni del tratto di trave.

MOMENTO FLETTENTE

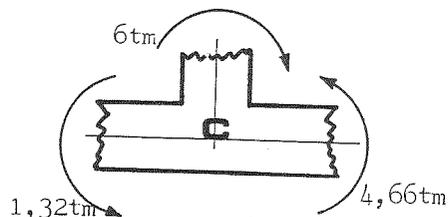
Partiamo dall'estremo A , dove il momento flettente è chiaramente nullo. Nel punto E il momento vale $Y_a \cdot 2 = 3,34$ tm. Nel punto C vale $Y_a \cdot 4 - P \cdot 2 = 1,67 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = -1,32$ tm, quindi il diagramma in tale punto esprime il fatto che le fibre tese sono sulla parte superiore della trave. Sempre nel nodo C si ha come momento rispetto a $R_b \cdot 2 = 4,66$ tm. Nel tratto DC si ha il momento massimo in C , $F \cdot 2 = 6$ tm.

VERIFICA

Se le reazioni sono esatte, la somma dei momenti rispetto al nodo C dovrebbe essere nulla:

$$F \cdot 2 - P \cdot 2 + Y_a \cdot 4 - Y_b \cdot 2 = 0,02 \text{ tm}$$

L'errore di 0,02 tm (in ogni caso accettabile) è dovuto all'approssimazione di Y_b .



Esercizio 5

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni della trave in figura sollecitata da carichi verticali e da una coppia in O di momento = 2 tm.

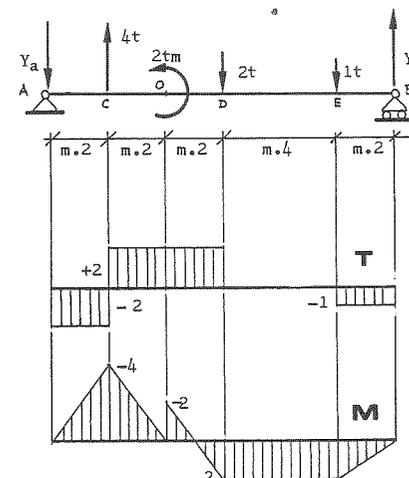
REAZIONI VINCOLARI

Applicando le equazioni di equilibrio si ottiene (1):

$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0 \quad \text{da cui} \\ -8 \text{ tm} - 2 \text{ tm} + 12 \text{ tm} + 10 \text{ tm} + \\ + 12 Y_b = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$Y_b = -1 \text{ t (rivolta verso l'alto perché la rotazione impressa rispetto ad A è negativa)}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_b = 0 \quad \text{da cui} \\ Y_a \cdot 12 \text{ m} + 40 \text{ tm} - 2 \text{ tm} - 2 \text{ tm} = 0 \\ Y_a = -2 \text{ t (rivolta verso il basso perché la rotazione impressa rispetto a B è negativa)} \end{aligned}$$



TAGLIO

Nel tratto AC il taglio vale Y_a , cioè 2 t, ed è negativo per le convenzioni accennate. Nel tratto CD il taglio è costante (in quanto non influenzato dalla coppia in O) e vale $-2 \text{ t} + 4 \text{ t} = 2 \text{ t}$ (positivo). Nel tratto DE non esiste sforzo di taglio in quanto avendo le forze applicate in D e in E lo stesso verso, non si hanno slittamenti delle sezioni. Nel tratto EB infine il taglio vale $T = Y_b = 1$ ed è negativo.

SFORZO NORMALE

Non esistendo forze orizzontali non si hanno sollecitazioni di sforzo normale.

(1) Le tre equazioni di equilibrio $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M = 0$, si possono sostituire con le equazioni dei momenti rispetto a due punti qualsiasi della trave. Per semplicità tali punti sono stati fatti coincidere con i vincoli. (Vedi Belluzzi, op. cit. pag. 56 nota 1).

(2) Assunto come senso positivo delle rotazioni quello destrogiro.

MOMENTO FLETTENTE

Si hanno i seguenti momenti nei diversi punti:

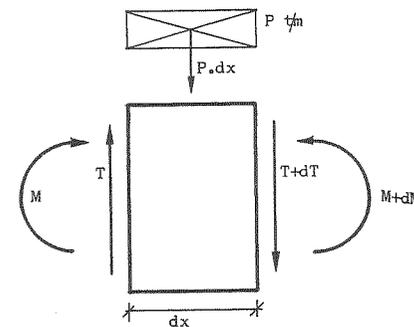
nel punto	momento
A	= 0
C	= $-2 t \cdot 2 m = -4 tm$.
O	= $-2 t \cdot 4 m + 4 t \cdot 2 m = 0$ (nel punto immediatamente a sinistra di O)
O	= $0 - 2 tm = -2 tm$. (nel punto immediatamente a destra di O)
D	= $-2 t \cdot 6 m + 4 t \cdot 4 m - 2 tm = 2 tm$
E	= $Y_b \cdot 2 m = 2 tm$
B	= 0

Nel tratto *DE*, in corrispondenza del tratto del diagramma del taglio privo di sollecitazione, il M_i si mantiene costante.

Relazioni analitiche tra i diagrammi di sollecitazione

Abbiamo finora disegnato i diagrammi di sollecitazione considerando separatamente, cioè non relazionati da leggi generali che colleghino, nella stessa struttura, la funzione del carico a quella del taglio e a quella del momento flettente. Esaminiamo ora dal punto di vista teorico tali relazioni, che risulteranno di particolare utilità nello studio o nella verifica dell'andamento dei diagrammi di strutture complesse.

Consideriamo un concio di trave (caricata con carico ripartito) di lunghezza infinitesima dx come nella figura accanto. Abbiamo visto che in genere lo stato di sollecitazione varia da una sezione all'altra. Poiché la distanza tra le sezioni considerate è infinitesima, e le funzioni dei diagrammi si suppongono continue nel tratto considerato, la variazione delle sollecitazioni da un sezione all'altra sarà infinitesima.



Avremo allora nella sezione di sinistra le sollecitazioni M (momento flettente) e T (taglio) e in quella di destra $M + dM$ e $T + dT$. Perché il concio elementare sia in equilibrio, debbono essere rispettate le equazioni cardinali della statica che in questo caso sono:

$$\Sigma Y = 0 \text{ da cui } T - p \cdot dx = T + dT \quad (p \cdot dx \text{ è il valore della forza dovuta al carico ripartito})$$

$$\Sigma M = 0 \text{ da cui } M + Tdx - p dx \cdot \frac{dx}{2} = M + dM.$$

La seconda equazione, ottenuta facendo il momento rispetto a un polo preso sulla sezione di destra, contiene un infinitesimo di secondo ordine che si può trascurare rispetto a quelli del primo. Le due equazioni allora si possono scrivere:

$$A) \quad p = - \frac{dT}{dx} \quad \text{e cioè} \quad T = \int - p dx + C_1$$

$$B) \quad T = \frac{dM}{dx} \quad \text{e cioè} \quad M = \int T dx + C_2$$

Quindi il diagramma di taglio si può ottenere integrando il diagramma di carico cambiato di segno a meno di una costante C_1 che rappresenta il taglio iniziale, e il diagramma del momento flettente si può ottenere integrando il diagramma di taglio a meno di una costante C_2 che rappresenta il momento nella sezione iniziale.

Si nota da quanto detto che la funzione del diagramma di taglio è sempre di un grado superiore alla funzione del diagramma di carico, e la funzione del momento flettente di un grado superiore alla funzione del taglio. Così ad esempio se il carico è uniformemente ripartito (funzione di grado zero), la legge di variazione del taglio sarà una retta (funzione di primo grado) e quella del momento flettente una curva di secondo grado.

Ricaviamo ad esempio i diagrammi di T ed M per una trave appoggiata agli estremi caricata con carico ripartito a diagramma triangolare come in figura. Concentrato il valore del carico nel baricentro del diagramma di carico ($1/3$ da B), si possono trovare le reazioni vincolari:

$$R_a = ql/6 \quad R_b = ql/3$$

Se fissiamo in A l'origine del sistema di riferimento, il diagramma di carico sarà una retta passante per l'origine di equazione:

$$p = \frac{q}{l} x$$

Applicando la A) otteniamo:

$$Tx = -\int p dx + C_1$$

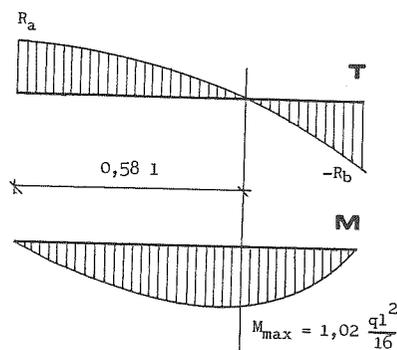
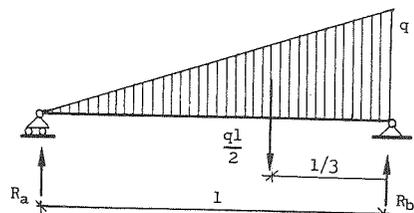
e cioè:

$$Tx = -\int \frac{q}{l} x dx + C_1$$

$$Tx = -\frac{qx^2}{2l} + C_1$$

e poiché C_1 rappresenta il taglio nella sezione iniziale A che vale $R_a = ql/6$:

$$Tx = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l}$$



Possiamo ora ottenere la funzione del diagramma dei momenti flettenti per integrazione della funzione del taglio osservando che questa volta il valore della costante di integrazione è zero in quanto sull'appoggio in A non esistono momenti flettenti. Avremo allora:

$$Mx = \int Tx dx \quad Mx = \int \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} dx \quad \text{da cui} \quad Mx = \frac{ql}{6} x - \frac{qx^3}{6l}$$

Il massimo momento flettente si avrà nel punto in cui si annulla la derivata prima di Mx e cioè per $Tx = 0$:

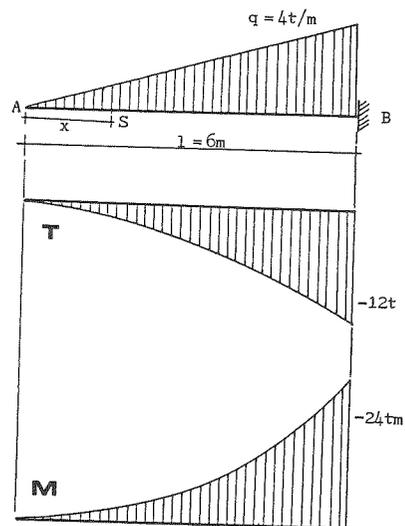
$$Tx = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{l}{3} = 0,571$$

Il momento massimo varrà quindi:

$$M_{max} = 1,02 \frac{ql^2}{16}$$

Esercizio 6

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi delle sollecitazioni di una trave a mensola con diagramma di carico triangolare (massimo in B dove $q = 4 \text{ t/m}$).



REAZIONI VINCOLARI

L'incastro in B ha una reazione verticale Y_b uguale e contraria al carico:

$$Y_b = \frac{ql}{2} = 12 \text{ t}$$

e un momento M_b uguale e contrario a quello che il carico provoca rispetto al punto B.

$$M_b = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 24 \text{ tm (1)}$$

TAGLIO

Come si deduce dal senso delle forze agenti il taglio è sempre negativo. In una generica sezione S distante x dal punto A esso ha il valore del carico che precede S. Chiamando y l'ordinata del carico nel punto S si avrà perciò:

$$T_s = -y \frac{x}{2} \text{ e poiché } y = \frac{q}{l} x \text{ si ottiene}$$

$$T_s = -\frac{q x^2}{l 2} \text{ e si avrà il valore massimo in B } (x = 6) \text{ dove } T_b = -\frac{q 6^2}{2l}$$

$$T_b = -12 \text{ t}$$

(ugualmente T_s si poteva ottenere con l'integrale:

$$T_s = -\int p dx + C, \text{ e cioè } T_s = -\int \frac{qx}{l} dx).$$

(1) Si è considerato il carico $\frac{ql}{2}$ agente sulla mensola concentrato

nel suo baricentro che dista $\frac{l}{3}$ da B.

MOMENTO FLETTENTE

Il M_s si può ricavare direttamente dalla legge di variazione del taglio:

$$M_s = \int T_s dx = \int -\frac{qx^2}{2l} dx = -\frac{qx^3}{6l}$$

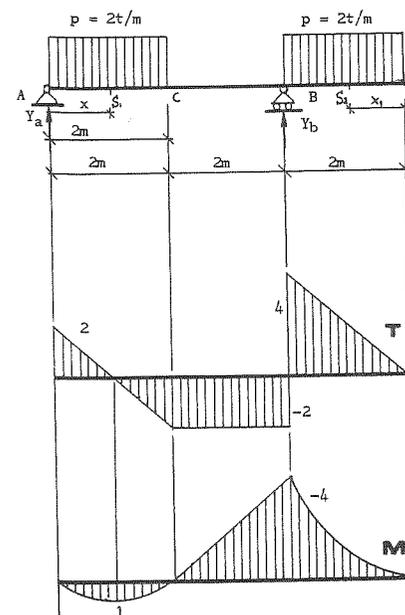
La costante di integrazione ha valore zero perché non vi sono altri momenti da sommare a quello risultante. Come verifica si può ricavarlo direttamente considerando che M_s è il prodotto del carico in AS per $\frac{x}{3}$, cioè per la distanza di S dal baricentro del carico considerato.

$$M_s = -\frac{qx^2}{2l} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{qx^3}{6l}$$

In particolare per $x = 6$ si ha $M_b = -24 \text{ t}$.

Esercizio 7

Trovare le reazioni e i diagrammi di sollecitazione di una trave vincolata in A da una cerniera e in B da un carrello avente una campata di m 4 e uno sbalzo di m 2, caricata con un carico ripartito $p = 2 \text{ t/m}$ come in figura.



REAZIONI VINCOLARI

Applicando le equazioni di equilibrio si ha:

$$\Sigma X = 0; \quad X_a = 0$$

$$\Sigma M_a = 0; \quad Y_b \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 0(1)$$

$$Y_b = 6 \text{ t}$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_a + 6 - 4 - 4 = 0$$

$$Y_a = 2 \text{ t}.$$

Per il calcolo delle reazioni si è sostituito al carico ripartito il corrispondente peso considerato concentrato nel baricentro del diagramma di carico. Tale operazione non è però possibile per la ricerca delle sollecitazioni se non per intervalli infinitesimi.

(1) Considerando positive le rotazioni levogire.

TAGLIO

In A il taglio ha il valore della $Y_a = 2 t$. Per calcolare il T nelle altre sezioni, essendo il carico ripartito, bisogna determinarne la legge di variazione, stabilire cioè il suo valore in una sezione S_1 distante x da A e S_2 distante x_1 da D. Cominciamo a considerare il tratto AC. Al valore $2 t$ del taglio in A, per ottenere il taglio in S_1 , bisognerà detrarre il carico che precede S_1 , e poiché la distanza di S_1 da A è x , tale valore sarà $2 x$; la legge di variazione di T nel tratto AC sarà dunque $T_x = 2 - 2 x$. Nel tratto CB il taglio varrà $Y_a - 4 t$ (essendo $4 t$ il valore del carico ripartito su AC) cioè $-2 t$, e sarà costante su tutto il tratto perché non intervengono altri carichi a modificarlo. Nel tratto BD infine, conviene considerare la generica sezione S_2 come distante x_1 da D. Nell'estremo D esso varrà 0 e crescerà in proporzione al carico, assumerà cioè il valore del carico a destra di S_2 , si avrà cioè $T_{x_1} = 2 x_1$. Volendo trovare T nel punto B, basta porre in $T_{x_1} = 2 x_1$ il valore $x_1 = 2$ e si avrà $T_b = 4 (1)$.

MOMENTO FLETTENTE

Per una generica sezione S_1 del tratto AC distante x da A il M_f è dato dalla differenza dei momenti della reazione Y_a e del carico a sinistra di S rispetto alla sezione, cioè:

$$M_{s1} = Y_a x - p x \cdot \frac{x}{2} = 2 x - x^2$$

Il valore massimo del M_f in questo tratto si ha nel punto di massimo della suddetta funzione, cioè dove si annulla la derivata prima. $M'_s = 0$, cioè $2 - 2 x = 0$. Tale punto vale $x = 1$, e si ha un M_f di

(1) *Paragonando come nella tabella che segue le varie leggi di variazione del taglio con le corrispondenti funzioni del momento flettente, si nota subito come le funzioni delle variazioni di T corrispondano alle derivate delle funzioni di M_f nei tratti corrispondenti. Per questo ai valori positivi di T corrisponde un andamento decrescente di M_f e viceversa, e nei punti in cui $T = 0$ si ha per M_f un max. o un min. (Belluzzi, op. cit., pag. 281).*

Tratto	Variazione di T	Variazione di M_f	Variazione di x
AC	$2 - 2 x$	$2x - x^2$	$0 < x < 2$
CB	-2 (costante)	$2x - 4 (1 - x)$	$2 < x < 4$
BD	$2x_1$	x_1^2	$0 < x_1 < 2$

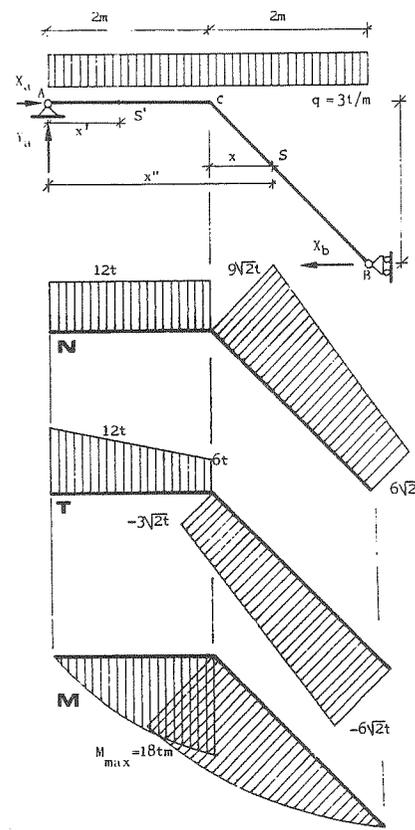
1 tm. Nel tratto CB, ripetendo il procedimento applicato nel tratto AC, si ha una legge lineare di variazione di $M = 2 x - 4 (x - 1)$. In B si avrà quindi $M_b = -4$. Nell'ultimo tratto BD conviene considerare la generica sezione S_2 distante x_1 da D. Il momento flettente sarà quindi dato dal valore $p x_1$ del carico a destra di S_2 concentrato nel baricentro del diagramma di carico, moltiplicato per il braccio $\frac{x_1}{2}$ (distanza del baricentro da S_2). La legge di variazione risulta quindi in questo tratto:

$$M_{s2} = p x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = x_1^2$$

Si ritrova quindi il valore -4 per il punto B in cui si ha $x_1 = 2$.

Esercizio 8

Trovare le reazioni e i diagrammi di sollecitazione della trave in figura, caricata con un carico ripartito $q = 3 t/m$. L'appoggio in B, per le ipotesi fatte, è bilaterale.



REAZIONI VINCOLARI

Consideriamo positivi i versi delle reazioni indicate in figura; se in realtà esse avranno verso opposto i calcoli ci daranno valore negativo.

$$\begin{aligned} \Sigma X &= X_a - X_b = 0 \\ \Sigma Y &= Y_a - 4 q = 0; Y_a = 12 t \\ \Sigma M_a &= X_b : 2 + q : 4 : 2 = 0; \end{aligned}$$

da cui $X_b = -12$ e $X_a = -12$

La reazione Y_a ha quindi il verso indicato in figura, mentre X_a e X_b lo hanno opposto. Il sistema è in equilibrio perché il vincolo B è bilaterale.

SFORZO NORMALE

Lo sforzo normale è dato dalle componenti secondo l'asse della trave delle forze che sollecitano le varie sezioni. Nel tratto AC le forze

parallele all'asse della trave sono X_a e X_b (1). Le altre forze non hanno componenti secondo la direzione x e perciò in tale tratto si avrà uno sforzo normale di 12 t, positivo perché di trazione. Chiamiamo α l'angolo formato da BC e dalla normale in C ad AC , e consideriamo una sezione in C normale all'asse di CB . Se tagliamo la trave in tale sezione e sostituiamo al tratto AC le corrispondenti forze riportate in C , la sezione sarà sollecitata, escluse le coppie, da tre forze: X_a , Y_a e $2q$ (carico gravante su AC). Le componenti di tali forze secondo CB sono (vedi figura) $X_a \cos \alpha$, $Y_a \cos \alpha$, $2q \cos \alpha$, e sommate danno:

$$(12 + 12 - 6) \frac{\sqrt{2}}{2} = 9 \sqrt{2} t$$

che è il valore dello sforzo normale positivo in C .

Se chiamiamo x la distanza di una generica sezione S di BC dalla normale ad AC passante per C il valore di N in S è $9 \sqrt{2} - qx \cos \alpha$ ($qx \cos \alpha$ è la componente secondo BC del carico gravante su CS e quindi produrrà uno sforzo negativo di compressione). La legge di variazione di N lungo BC sarà dunque:

$$N_s = 9 \sqrt{2} - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

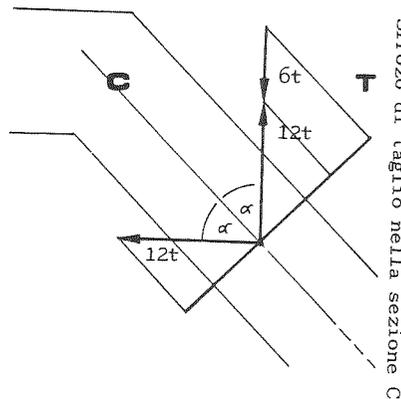
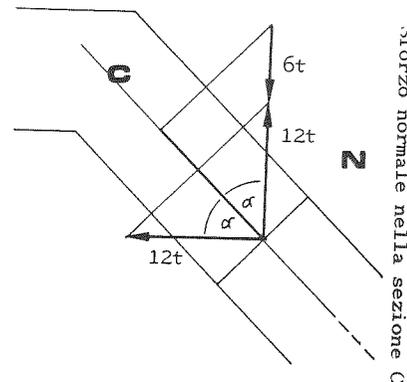
e quindi in B (dove $x = 2$) lo sforzo normale varrà $6 \sqrt{2} t$.

TAGLIO

Le forze trasmesse dal tratto AC ad una sezione in C normale a CB oltre che sforzi normali, danno sforzi di taglio. Tali sollecitazioni sono ortogonali all'asse del tratto CB e quindi si ricavano trovando le componenti di direzione normale all'asse di CB delle forze agenti X_a , Y_a , $2q$, e sommandole, tenendo presente che le componenti di $2q$ e X_a hanno verso opposto a quella di Y_a (v. figura).

$$T_c = (X_a + 2q - Y_a) \sin \alpha = -3 \sqrt{2}$$

(1) Le forze X_b e X_a sono spostabili in qualsiasi punto della struttura, purché si aggiunga una coppia di trasporto. Tuttavia per le sollecitazioni di sforzo normale tale coppia non viene considerata non producendo sollecitazioni assiali.



Se ci spostiamo lungo la trave da C verso B , si somma gradatamente l'effetto del carico ripartito y e perciò in una generica sezione S di CB il taglio vale $T_c - qx \sin \alpha$, la legge di variazione di T_s sarà:

$$T_s = -3 \sqrt{2} - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

Nel punto B ($x = 2$) T varrà $-6 \sqrt{2}$. Per quanto riguarda il tratto AC il taglio ha in X_a il valore di $Y_a = 12 t$. In una generica sezione S' esso varrà $Y_a - qx'$, chiamando x' la distanza di S' da A . La legge di variazione di T in AC sarà:

$$T_s' = 12 - 3x'$$

Nella sezione in C normale ad AC esso sarà quindi $T = 6 t$.

MOMENTO FLETTENTE

Poiché la legge di variazione del taglio è lineare, la legge di variazione del momento flettente sarà una funzione di 2° grado in entrambi i tratti.

Nel tratto AC il M_s di una generica sezione S' distante x' da A vale infatti:

$$M_s' = Y_a x' - q x' \frac{x'}{2} = 12 x' - 3 \frac{x'^2}{2}$$

Il momento flettente massimo si ha in C ($x' = 2$) dove si ha $M_c = 18 t$. Nel tratto BC il momento flettente di una generica sezione S , distante x'' da A , ha la stessa legge per quello che riguarda le forze verticali, ma non avendo la reazione X_a in questo caso braccio nullo, bisogna considerarla nell'espressione di M_s . Detta y la distanza di S dall'asse di AC , tenendo presente che la rotazione generata da X_a va assunta col segno negativo perché comprime le fibre inferiori, la legge di variazione di M_s sarà:

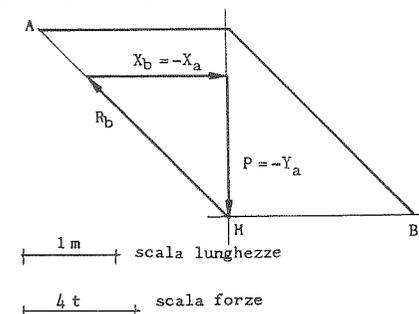
$$M_s = Y_a x'' - q \frac{x''^2}{2} - y X_a \text{ e poiché } y = x'' - 2 \text{ (v. figura)}$$

$$M_s = 12 x'' - \frac{3}{2} x''^2 - 12 (x'' - 2)$$

Anche questo diagramma avrà un valore massimo in C in cui $M_c = 18 t$. Se i due tratti fossero cioè rettificati il diagramma risulterebbe chiuso.

VERIFICA DELLE REAZIONI

Concentrato nel baricentro del diagramma di carico il valore totale del peso $P = 12 t$, il problema è quello di chiudere il triangolo di equilibrio formato da P , dalla direzione di X_b e da una terza direzione



per AH , in cui H è il punto intersezione della direzione di X_a con la retta di applicazione di P . Dalla soluzione in figura si verifica che $P = 12 t$ coincide con la componente Y_a della reazione in A e $X_b = 12 t$ coincide con l'inverso di X_a . (V. Tedone - Statica Grafica pag. 161).

VINCOLI ESTERNI E VINCOLI INTERNI

I vincoli si diversificano per il numero e il tipo di movimento che impediscono in una struttura. Si possono distinguere due categorie principali di vincoli: vincoli a terra e vincoli interni. Mentre i primi reagiscono secondo una direzione precisa, i secondi sono sede di diverse reazioni che si elidono tra loro. Ciò risulta intuitivo se si considera che la forza dei vincoli a terra è fornita dalle fondazioni e, indirettamente, dal terreno, mentre le forze che arrivano ai vincoli interni sono trasmesse dalle aste che in essi convergono, e dovendo tali vincoli interni essere in equilibrio, tali forze non possono che elidersi a vicenda.

Si possono costruire, in base ai movimenti che ciascun vincolo consente o impedisce, le seguenti tabelle:

VINCOLI A TERRA

tipo	vincolo	simbolo	impedisce	permette
I	appoggio pendolo		traslazioni verticali	traslazioni orizzontali e rotazione
II	cerniera		traslazioni verticali e orizzontali	rotazioni
III	incastro		traslazioni orizzontali, vertic. e rotaz.	//

VINCOLI INTERNI

vincolo	simbolo	impedisce	permette	equazioni
cerniera interna		traslazioni vert. e orizzontali	rotazioni	$\sum M_c \text{ (parz.)} = 0$
doppio pendolo verticale		traslazioni vert. e rotazioni	traslazioni orizzontali	$\sum X \text{ (parz.)} = 0$
doppio pendolo orizzont.		traslazioni orizzontali e rotaz.	traslazioni verticali	$\sum Y \text{ (parz.)} = 0$

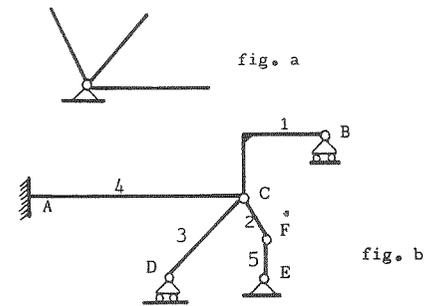
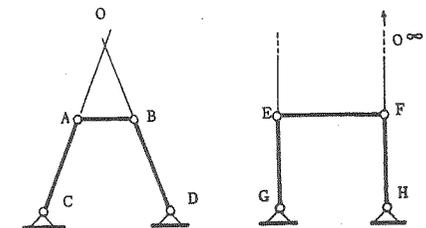
Per i vincoli a terra le diverse funzioni dei vari tipi di vincolo sono evidenti. C'è da notare che, mentre per l'appoggio semplice la direzione della reazione è normale al piano di scorrimento del carrello, per il pendolo tale direzione deve passare per l'asse dell'asta. Per quel

che riguarda i vincoli interni si deve tenere presente che essi congiungono due (o più) parti di una stessa struttura. Se infatti la cerniera fosse fissata a terra (fig. a) essa toglierebbe a ciascuna delle x aste in essa convergenti $2x$ possibilità di movimento, mentre se fosse fissata internamente alla struttura (fig. b) essa toglierebbe 2 possibilità di movimento alle aste 1, 2 e 3, ma, essendo a sua volta sostenuta dall'asta 4, non toglie a questa nessuna possibilità di movimento. La cerniera C impedisce allora due movimenti a tutte le aste che in essa convergono meno una.

$$V_c = 2(n - 1)$$

Come applicazione vogliamo stabilire se nel sistema di fig. b, esistono possibilità di movimento o se tutti i gradi di libertà del sistema sono assorbiti dai vincoli. Ogni asta ha 3 gradi di libertà, ed essendo le aste 5, in totale i gradi di libertà saranno 15. Vediamo ora quale numero di movimenti i vincoli A, B, C, D, E, F sono in grado di impedire. A , essendo un incastro, preclude 3 possibilità di movimento. B , appoggio, ne impedisce una, come pure D . La cerniera in E impedisce 2 possibilità di movimento. Le possibilità di movimento che i vincoli esterni sono in grado di impedire sono dunque in numero di $3 + 1 + 1 + 2 = 7$. Rimangono i vincoli interni C ed F . Applicando la formula si ha che C impedisce $2(4 - 1) = 6$ movimenti, mentre F ne impedisce $2(2 - 1) = 2$. In totale si ha allora che la struttura può compiere ancora un numero di movimenti pari al grado di libertà totale (15) meno gli impedimenti dei vincoli, cioè $15 - 7 - 6 - 2 = 0$. La struttura cioè non si può muovere e non ha vincoli sovrabbondanti, è cioè isostatica.

Il doppio pendolo si può considerare formato da due pendoli paralleli con le cerniere unite da un'asta. Consideriamo prima due pendoli convergenti in un punto. Un'asta collegata alle cerniere A e B , ha la possibilità di ruotare intorno al punto d'incontro dell'asse delle due bielle (o pendoli), cioè 0 (v. figura). Questo fatto permette di considerare il punto O una cerniera ideale. Quando la cerniera O è all'infinito, come nel caso in cui i due pendoli siano paralleli, la rotazione di un'asta intorno a un punto all'infinito corrisponde a una traslazione (orizzontale nel caso di figura). L'asta a in figura, negli spostamenti di EF , si mantiene sempre parallela a se stessa, e quindi si può affermare che il doppio pendolo verticale consente solo spo-



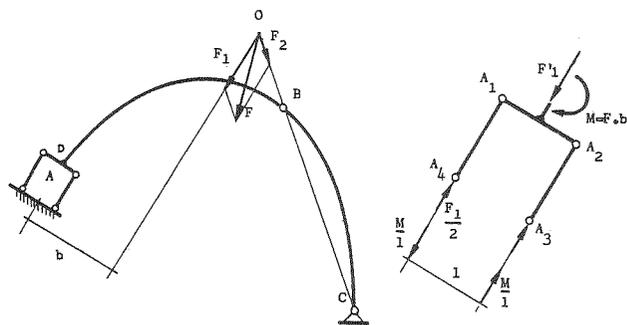
stamenti in una direzione ma non rotazioni. Se nell'esempio in figura GH fosse collegato a un'altra parte di struttura, anziché a terra, si avrebbe uno dei casi considerati nella tabella dei vincoli interni. Come applicazione si vuole trovare con che tipo di reazioni reagisce una struttura formata da due archi collegati tra loro a cerniera e vincolati a terra con una cerniera e un doppio pendolo. La forza F è ortogonale e disposta come in figura.

Il problema della determinazione delle reazioni vincolari è, sia in termini grafici che analitici, quello della scomposizione di un vettore forza (o più vettori) in due o più direzioni. Il problema che si presenta immediatamente è quindi quello di stabilire quali siano, in una certa struttura, queste direzioni. Nel caso specifico notiamo che l'arco tra due cerniere BC , essendo scarico, può essere assimilato a un pendolo, ed è quindi determinata la direzione della reazione in C . Sappiamo poi che il doppio pendolo reagisce secondo la direzione dei pendoli, paralleli tra loro, e quindi, trovato il punto O di intersezione tra BC e la retta di applicazione di F , mandiamo per O la parallela alla direzione dei pendoli. Si tratta ora di scomporre la forza F secondo le componenti F_1 e F_2 di direzione assegnata. Mentre per quel che riguarda la reazione in C il problema è risolto, poiché di R_c conosciamo la direzione, e sappiamo che ha intensità uguale a F_2 e verso contrario, per quel che riguarda il doppio pendolo in A non abbiamo ancora determinato le reazioni secondo i pendoli $A_4 A_1$ e $A_3 A_2$. Per far questo spostiamo la forza F_1 (parallelamente a sé stessa) in D . Naturalmente in D avremo la forza F'_1 e un momento $M = F'_1 \cdot b$, dove b è la distanza di F'_1 da D . Le reazioni debbono equilibrare sia la forza F'_1 che il momento M . Siccome F'_1 è in mezziera rispetto ad A_1 e A_2 , le reazioni a tale forza saranno $F'_1/2$. Le reazioni equilibranti il momento M sono M/l (dove l è la distanza $A_1 - A_2$). Queste due reazioni di uguale modulo M/l , hanno direzione opposta tale che il loro momento sia opposto a quello di $M = b \cdot F'_1$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti si possono ora comporre le reazioni parziali e si ottiene:

$$\text{Reazione secondo } A_4 A_1 = \frac{F'_1}{2} - \frac{M}{l}$$

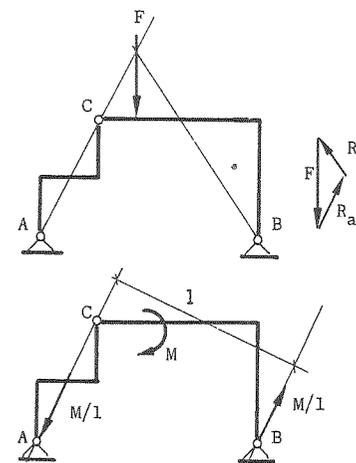
$$\text{Reazione secondo } A_3 A_2 = \frac{F'_1}{2} + \frac{M}{l}$$

Che le reazioni non fossero uguali nei due pendoli era facilmente prevedibile perché essi debbono reagire anche a un momento. Sarebbero state uguali se F_1 fosse stato incidente in D ($b = 0$).

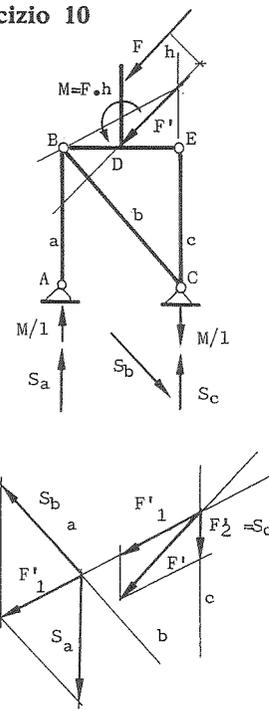


Esercizio 9

Trovare le reazioni vincolari nei sistemi in figura. Nel caso della forza verticale il tratto AC , essendo scarico, si può assimilare a un pendolo e quindi R_a avrà la direzione di AC . Perché ci sia equilibrio poi, R_b dovrà passare per l'intersezione della retta di applicazione di F con la congiungente AC . Nel caso della coppia in B di momento M una reazione (R_a), dovrà ancora passare per il pendolo scarico AC . Dovendo equilibrare una coppia R_b avrà la stessa direzione ma verso opposto, tale che il momento formato dalla coppia dovuta a R_a, R_b , sia uguale ed opposto ad M . Il modulo delle reazioni sarà M/l , dove con l indichiamo la distanza tra le rette di applicazione di R_a e R_b .



Esercizio 10



Dimostrare che il complesso di aste e nodi $ABCE$ si comporta nei confronti di un'asta ad esso fissata in D come un incastro.

Se infatti l'asta in D è sollecitata da una forza obliqua F e i vincoli sono capaci di equilibrarla, allora $ABCE$ corrisponde a un incastro (1). In altre parole un vincolo di incastro deve essere in grado di impedire traslazioni orizzontali e verticali, e inoltre rotazioni. In questo caso, riporta la forza F in D , essa è equivalente a una forza F' di uguale direzione, verso e intensità, più una coppia di momento $M = F \cdot h$. Il vincolo deve quindi reagire con reazioni uguali e contrarie a F'_x e F'_y , e un momento reagente pari a $-M$. Il momento M sarà senz'altro equilibrato da forze agenti secondo i pendoli paralleli BA ed EC . Il loro modulo sarà

(1) Trascurando, naturalmente, la deformazione delle aste che produrrà lo spostamento del punto D .

M/l (chiamando l la distanza AC) e il momento della coppia che ne risulta sarà tale da equilibrare M . Rimane ora da equilibrare la sola forza F applicata in D . Le aste che portano ai vincoli a terra questa forza sono la a, b, c . Basterà allora conoscere gli sforzi con cui sono sollecitate queste aste per determinare le reazioni. In altre parole si tratta di scomporre F secondo tre direzioni (a, b, c) (v. figura alla pagina precedente, in basso). Una volta trovati gli sforzi che le aste trasmettono in A e C , si compongono per trovare le reazioni:

$$R_c = S_b + S_c - \frac{M}{l}$$

$$R_a = S_a + \frac{M}{l}$$

Poiché allora, le reazioni riescono a equilibrare le forze agenti, $ABEC$ corrisponde a un incastro.

Esercizio 11

Determinare le reazioni vincolari di un arco a tre cerniere sollecitato da una forza verticale F di 2 tonnellate.

SOLUZIONE ANALITICA

Poiché le incognite delle reazioni agli appoggi sono 4 (X_a, Y_a, X_b, Y_b), bisogna scrivere quattro equazioni di equilibrio. Si ricavano due equazioni dalla constatazione che, perché si abbia equilibrio, debbono essere nulle le componenti orizzontali e verticali delle forze esterne, e una terza dovuta al fatto che debbono essere nulle le rotazioni rispetto ad una delle cerniere (ad esempio A). Si ottengono le tre equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \Sigma Y = 0 \text{ da cui } Y_a + Y_b - F = 0 \\ \Sigma X = 0 \text{ da cui } X_a + X_b = 0 \\ \Sigma M_a = 0 \text{ da cui } 2 \cdot F - Y_b \cdot 8 = 0 \end{cases}$$

A queste equazioni bisogna aggiungere una quarta ausiliaria, affinché il numero delle equazioni sia pari al numero delle incognite. Tale equazione è data dall'equilibrio delle rotazioni intorno alla cerniera C (1) del semiarco BC .

$$M_{c(BC)} = Y_b \cdot 4 + X_b \cdot 2,5 = 0$$

(1) Se il sistema fosse costituito da un solo arco (se non ci fosse la cerniera C) si potrebbero scrivere tre equazioni soltanto, mentre

dalla terza equazione si ricava $Y_b = \frac{1}{2} t$ e sostituendo nella prima

$Y_a = 1,5 t$. Sostituendo il valore di Y_b nella quarta si ha $X_b = \frac{2}{2,5} = 0,8$,

mentre per la seconda equazione si ha che X_a deve essere uguale ad X_b , ma di verso opposto. Riassumendo:

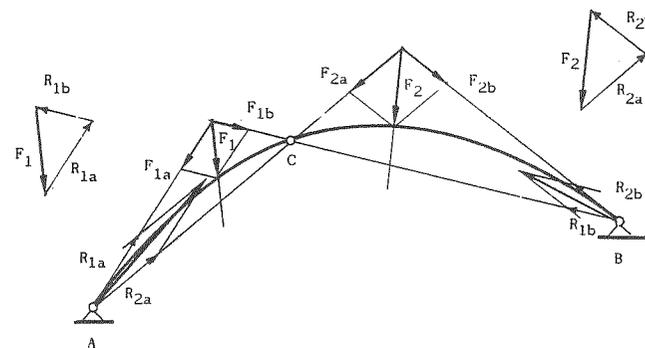
$$Y_a = 1,5 t; \quad X_a = -0,8 t; \quad Y_b = \frac{1}{2} t; \quad X_b = 0,8 t$$

SOLUZIONE GRAFICA

Se consideriamo il semiarco scarico BC , notiamo che, perché esso sia in equilibrio, bisogna che le due forze esterne che su esso agiscono (la reazione R_b e la reazione in C), oltre ad essere uguali e contrarie, debbono avere la stessa retta di applicazione, la quale non può differire dalla congiungente BC . Unendo con una retta tali punti abbiamo così determinato la direzione di R_b . Sapendo poi che un sistema può essere in equilibrio (condizione necessaria ma non sufficiente) (2) se composto da tre forze che si incontrano in un punto, determiniamo l'intersezione della retta d'azione di R_b con la retta d'azione di F , cioè H . La retta d'azione di R_a sarà la congiungente AH . Si tratta ora di equilibrare la forza F con due forze (le reazioni R_a ed R_b) di cui si conoscono le rette di applicazione. Si ottiene il triangolo di equilibrio in figura da cui è facile ottenere le componenti Y_b e X_b della reazione R_b e Y_a, X_a della reazione R_a .

Esercizio 12

Determinare le reazioni vincolari col metodo grafico in un arco a tre cerniere sollecitato su ogni semiarco da una forza F come in figura.



le due cerniere presentano 4 incognite; il sistema risulterebbe cioè staticamente indeterminato. Poiché invece l'arco è formato di due tratti, possiamo utilizzare la condizione che il tratto BC sia in equilibrio rispetto a C , che cioè la reazione R_b (Y_b, X_b) non faccia ruotare il semiarco intorno a C . Tradotto in termini grafici questo significa che la retta d'azione di R_b deve passare per C . (vedi Belluzzi - Scienza delle Costruzioni, vol. I - pag. 71-72 e Tedone Cattaneo - Statica Grafica, pag. 169).

(2) Se infatti le tre rette d'azione non passassero per un solo punto si potrebbe avere $R = 0$ ma non $M = 0$. (v. Tedone - Mecc. Raz., pag. 127 e Tedone Cattaneo - Stat. graf., p. 23).

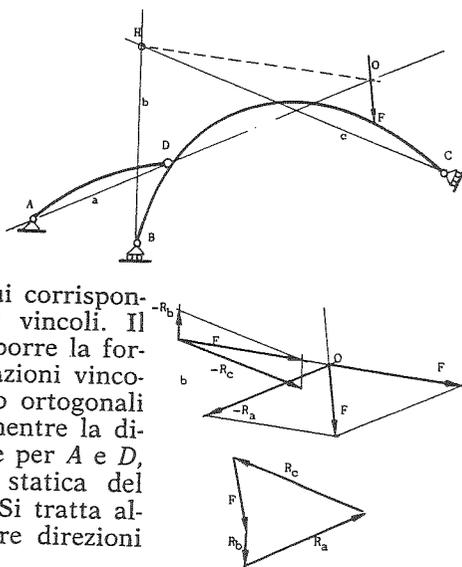
SOLUZIONE

Il problema non può essere risolto trovando la risultante delle due forze F_1 e F_2 e sostituendola ad esse perché tale sostituzione è lecita solo per ogni singolo semiarco (1). Bisogna perciò applicare il principio della sovrapposizione degli effetti (2), considerando dapprima l'arco sollecitato dalla sola forza F_1 che da luogo alle reazioni R_{1a} e R_{1b} , e poi dalla sola F_2 con reazioni R_{2a} e R_{2b} . Per il principio di sovrapposizione degli effetti R_{1a} e R_{2a} sono componenti della reazione R_a , come pure R_{1b} e R_{2b} risultano dalla somma vettoriale di R_{1b} e R_{2b} . Per trovare tali componenti si procede come nel caso generale di un arco a tre cerniere sollecitato da una sola forza su uno dei semiarchi, e cioè notando per F_1 ad esempio, agente sul semiarco AC , che il componente di R_b dovuto ad F_1 dovrà passare per A e per il punto d'incontro della retta per BC con la retta d'azione di F_1 . Il problema si riduce ora a trovare due forze, di cui si conoscono le rette d'azione, che equilibrino la forza F_1 . Ciò può essere fatto col triangolo di equilibrio (a sinistra in alto in figura) oppure notando che le forze equilibranti F_1 sono uguali ed opposte ai suoi componenti F_{1a} e F_{1b} secondo le direzioni di R_{1a} e R_{1b} . Applicando lo stesso metodo alla forza F_2 si trovano gli altri due componenti R_{2a} e R_{2b} delle reazioni da cui si risale, con la composizione di R_{1a} e R_{2a} e poi di R_{1b} e R_{2b} , alle reazioni.

Esercizio 13

Trovare graficamente le reazioni vincolari del sistema in figura.

Il sistema è isostatico. Togliendo infatti i vincoli l'arco BC ha 3 gradi di libertà, mentre AD ne ha uno (poiché, una volta fissata la posizione di BC , esso può effettuare solo una rotazione). In totale il sistema ha dunque quattro gradi di libertà cui corrispondono altrettanti impedimenti dei vincoli. Il problema è quindi quello di scomporre la forza F secondo le direzioni delle reazioni vincolari. Le direzioni di R_b ed R_c sono ortogonali ai piani di appoggio dei carrelli, mentre la direzione di R_a sarà la retta passante per A e D , essendo assimilabile la funzione statica del tratto AD a quella di un pendolo. Si tratta allora di scomporre F secondo le tre direzioni



(1) V. Belluzzi (op. cit.), pag. 48, par. 51 e pag. 67, par. 67.
 (2) V. Belluzzi (op. cit.), pag. 11, par. 13.

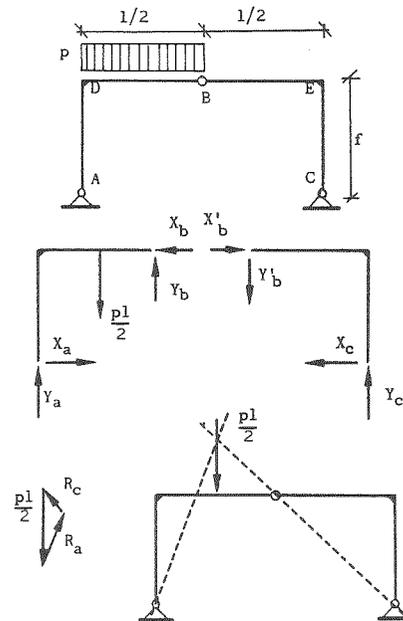
a, b, c , delle reazioni. Applicato F in O , intersezione della retta d'azione di F con a , e chiamata H l'intersezione di b con c , si scompone F secondo la direzione di a e della congiungente HO , ottenendo la reazione R_a cambiata di segno e un vettore F' . Facendo scorrere F' lungo la sua retta di applicazione e applicandolo in H , si può scomporlo secondo le direzioni di b e c , ottenendo $-R_b$ e $-R_c$, di modulo e direzione uguali alle reazioni in B e C e di verso opposto. Si può controllare che il poligono delle forze formato con le reazioni trovate si chiude (vedi figura), che cioè il sistema è in equilibrio.

Si noti che il punto H di intersezione tra le direzioni b e c corrisponde, anche per quel che riguarda la soluzione grafica, a una cerniera ideale.

Esercizio 14

Trovare le reazioni vincolari dell'arco a tre cerniere in figura, caricato con un carico ripartito p su uno dei lati, e determinarne i diagrammi.

Il metodo più spedito per il calcolo delle reazioni in un arco a tre cerniere è quello di scrivere quattro equazioni (tre ordinarie e una ausiliaria), come nell'esempio visto in precedenza. Tuttavia può essere espressivo considerare separatamente l'equilibrio dei tratti AB e BC . La cerniera B trasmette, rispetto al tratto AB , una reazione di componenti X_b, Y_b , che lo mantengono in equilibrio, e rispetto al tratto BC una reazione di componenti X'_b, Y'_b . Per lo equilibrio della cerniera B in totale le reazioni X_b, Y_b, X'_b, Y'_b , debbono annullarsi (v. figura). Possiamo allora considerare il semiarco AB e quello BC separati, e scrivere per ciascuno tre equazioni di equilibrio. Concentrando il carico ripartito ad $l/4$ da A , tali equazioni risultano, ponendo, per la considerazione fatta $X'_b = -X_b$ e $Y'_b = -Y_b$:



$$\text{equilibrio di } AB \left\{ \begin{aligned} X_a - X_b &= 0 \\ Y_a + Y_b - \frac{pl}{2} &= 0 \\ M_a = X_b \cdot f + Y_b \cdot \frac{l}{2} - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{equilibrio di BC} \begin{cases} X_b - X_c = 0 \\ Y_c - Y_b = 0 \\ M_c = Y_b \cdot \frac{l}{2} - X_b \cdot f = 0. \end{cases}$$

Si ottiene così un sistema di sei equazioni incognite. Dalla sesta equazione si ha:

$$X_b = Y_b \cdot \frac{l}{2f}$$

e, sostituendo nella terza

$$Y_b \cdot l - \frac{pl^2}{8} = 0 \quad Y_b = \frac{pl}{8} = Y_c$$

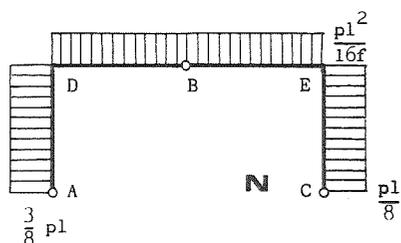
Dalla sesta equazione si ha:

$$\frac{pl^2}{16} - X_b \cdot f = 0 \quad \text{da cui } X_b = \frac{pl^2}{16f} = X_c = X_a$$

Dalla seconda equazione si ha:

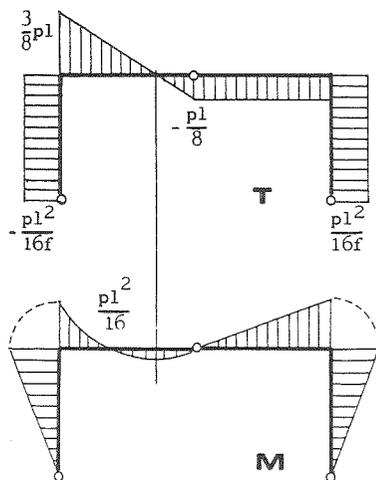
$$Y_a = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{8} \quad \text{da cui } Y_a = \frac{3}{8} pl.$$

Graficamente le reazioni si trovano (come nella terza figura) assimilando il tratto scarico BC a un pendolo la cui reazione passa per le cerniere. X_b e Y_b sono le componenti della reazione R_c , come si può constatare notando che R_c si può far scorrere in B, ad equilibrare il semiarco AB.



SFORZO NORMALE

Corrisponde alle forze agenti assialmente alla struttura e perciò in AD vale $Y_a = -\frac{3}{8} pl$, in DE $Y_a = -\frac{pl^2}{16f}$ e in EC vale $Y_c = -\frac{pl}{8}$. E' sempre di compressione e cioè negativo.



TAGLIO

Partendo dalla cerniera in A, nel tratto verticale del semiarco AB, troviamo il solo sforzo tangenziale X_a che da appunto il valore (costante), del taglio fino al gomito D (v. figura pag. precedente). Il valore in questo tratto è cioè $-\frac{pl^2}{16f}$ negativo. Nel Tratto DB invece le forze che intervengono sono la reazione verticale Y_a , trasportata in D, e il carico ripartito p . In questo tratto naturalmente X_a non genera taglio perché, trasportata in D, è normale alle sezioni di DB. Il taglio varierà con la legge lineare $T_x = \frac{3}{8} pl - px$ dove x è la distanza di una sezione generica da D. Il taglio sarà nullo quando:

$$T_x = \frac{3}{8} pl - px = 0 \quad \text{e quindi } x = \frac{3}{8} l$$

Da questa legge si può ricavare pure la legge di variazione del M_x (a meno della costante di integrazione), poiché in una generica sezione distante x da D si ha:

$$M_x = \int T_x dx = \int \left(\frac{3}{8} pl - px \right) dx$$

$$M_x = \frac{3}{8} pl x - \frac{px^2}{2} + C$$

che dovremo confrontare con la legge del mom. flettente ricavata direttamente dalle forze agenti. In B il taglio vale $-pl/8$ (si ha: $x = \frac{1}{2}$) e si mantiene costante in BE. Come per AD il taglio vale costantemente $pl^2/16f$ in CE.

MOMENTO FLETTENTE

Nel tratto AD il M_x varia con la legge lineare $M_x = X_a \cdot y$ dove y è la distanza di una generica sezione di DA da A. In D si avrà $M_d = X_a \cdot f = \frac{1}{16} pl^2$. Per simmetria di sollecitazioni e lunghezze il diagramma si ripeterà specularmente in CE. Vogliamo ora trovare il diagramma in DB. Le forze agenti sono Y_a , X_a e il carico ripartito p . Notiamo intanto che al variare di x (distanza da D) variano i momenti causati da Y_a e p , ma rimangono costanti i momenti dovuti a X_a e cioè $-X_a \cdot f$ (levogiro) ed è appunto questo il valore di C, costante di integrazione di $\int T_x dx$. La legge di variaz. di M_x è perciò:

$$M_x = Y_a \cdot x - px \cdot \frac{x}{2} - X_a \cdot f$$

e cioè

$$M_x = \frac{3}{8} pl x - p \frac{x^2}{2} - X_a \cdot f$$

Il punto di massimo di questa funzione sarà (derivando):
 $M'_x = -px + \frac{3}{8} pl = 0$ cioè $x = \frac{3}{8} l$, il che conferma il diagramma del taglio (che si annullava in tale punto). In questo punto si ha:

$$M_f = l^2 \left(\frac{9p}{128} - \frac{p}{16} \right)$$

Nel tratto BE si avrà poi un diagramma triangolare passante per $M_b = 0$ e $M_d = \frac{pl^2}{16}$, perché dal diagramma EC si è visto che tale era il valore del momento in D .

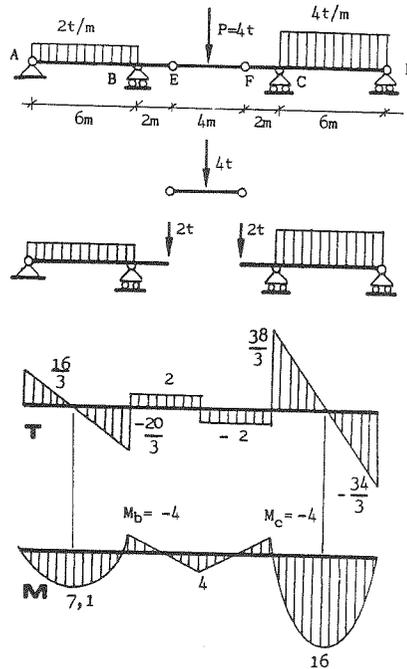
Esercizio 15

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi di sollecitazione della trave Gerber in figura.

La trave Gerber è una trave su più appoggi resa isostatica mediante cerniere (1). Viene usata particolarmente quando si temono cedimenti sugli appoggi o quando si vogliono alleggerire i carichi gravanti su alcuni appoggi poco sicuri (nello schema in esame verrebbero alleggeriti, grazie al momento M_b e M_c gli appoggi in A e D).

REAZIONI VINCOLARI

Si può considerare il tratto EF compreso tra le cerniere come una trave caricata in mezzaria che trasmette ai vincoli un carico verticale pari a $\frac{P}{2}$, cioè 2 t. Si considerano parimenti le parti di trave AE ed FC come travi su due appoggi caricate come indicato dal problema e con un carico di 2 t trasmesso dal tratto EF sull'estremo E dello sbalzo BE , e sull'estremo F dello sbalzo CF . La determinazione delle reazioni in AB e CD , si riduce perciò al problema di calcolare le



(1) Per le reazioni vincol. della trave Gerber v. Belluzzi, « Scienza delle costruzioni », vol. I, pag. 74, per le sollecit. p. 430-432.

reazioni di due travi su due appoggi. Considerando il tratto AS si ottiene:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= 0 & Y_a + Y_b - 14 &= 0 \\ \Sigma M_a &= 0 & 12 \cdot 3 - Y_a \cdot 6 + 2 \cdot 8 &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$Y_a = \frac{16}{3} \quad Y_b = \frac{26}{3}$$

Con lo stesso procedimento per il tratto FD , attraverso le equazioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= Y_c + Y_d - 26 = 0 \\ \Sigma M_d &= 12 \cdot 8 - Y_c \cdot 6 + 24 \cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$Y_c = \frac{44}{3}, \quad Y_d = \frac{34}{3}$$

Volendo determinare le reazioni considerando il sistema come una unica trave bisogna scrivere tante equazioni quante sono le reazioni incognite (cioè quattro). Le equazioni fondamentali della statica forniscono due di queste equazioni, mentre le altre due, dette ausiliarie (1), si ricavano dalla condizione che il momento flettente si annulla nelle cerniere, come verrà verificato nei diagrammi del M_f .

Si ottiene quindi il sistema di quattro equazioni:

$$\begin{cases} \Sigma Y = 12 + 4 + 24 - Y_a - Y_b - Y_c - Y_d = 0 \\ \Sigma M_a = 12 \cdot 3 - Y_b \cdot 6 + 4 \cdot 10 - Y_c \cdot 14 + 24 \cdot 15 - Y_d \cdot 20 = 0 \\ M = Y \cdot 8 - 12 \cdot 5 + Y_b \cdot 2 = 0 \\ M = Y \cdot 8 - 24 \cdot 5 + Y_c \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione dà le reazioni cercate.

SFORZO DI TAGLIO

Si può cominciare, anziché da un estremo della trave, dal tratto centrale EF . In questo tratto si ha una reazione della cerniera E di 2 t e quindi un valore costante del taglio da E al punto di applicazione di P pari a 2 t, mentre nel tratto da P ad F il taglio vale $2 - P = -2$ t ed è quindi negativo. Nel tratto BE (vedi figura), non intervenendo altre forze, il taglio si mantiene costante, come pure nel tratto FC . Nel

(1) In un sistema staticamente determinato si possono scrivere tante equazioni ausiliarie quante sono le cerniere interne.

tratto AB e in CD esso varierà con legge lineare, e basta quindi determinare i valori massimo e minimo in corrispondenza degli appoggi.

Nel tratto AB il massimo valore è dato dalla reazione $Y_a = \frac{16}{3} t$, mentre

il minimo è dato da $Y_a - 12 t = -\frac{20}{3} t$.

Lo stesso procedimento si adotta nel tratto FD , dove si ricava un massimo in C pari a uno sforzo tagliante di $\frac{38}{3} t$ e un minimo in D

pari a $-\frac{34}{3} t$. Si può notare che il diagramma del taglio non presenta

particolarità in corrispondenza delle cerniere, cioè le cerniere trasmettono da un tronco di trave all'altro lo sforzo di taglio, senza fenomeni particolari. Per il mom. flettente invece, il diagramma si deve annullare in corrispondenza delle cerniere.

MOMENTO FLETTENTE

Si considera, al solito, il tratto centrale EF come una trave staccata, e si trova il M_{max} causato da P . Esso varrà $\frac{P}{2} \cdot 2 = 4 \text{ tm}$ e il dia-

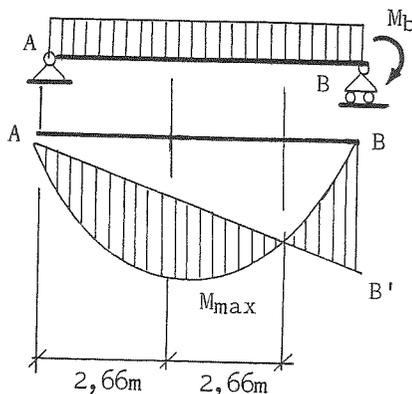
gramma, annullatosi in E ed F , poiché non intervengono altre forze nei tratti BE ed FC , prosegue con la stessa legge fino a B e C (v. figura). L'andamento del diagramma di M_f in AB si ricava graficamente (2) de-

traendo al diagramma parabolico del carico ripartito, il diagramma triangolare dovuto al momento M_b . Il massimo M_f in questo tratto si ha in corrispondenza all'annullarsi del diagramma di taglio la cui legge di variazione è:

$$R_a = \frac{16}{3}$$

$$\frac{16}{3} - 2x = 0 \quad x = 2,66 \text{ m.}$$

(2) Si traccia il diagramma dei momenti (come in figura) del solo carico ripartito senza tener conto della coppia rovinata dalla sollecitazione di $p/2$ trasmessa in E dal tronco EF , quindi si traccia il diagramma del mom. M della coppia (triangolare). Se si raddrizza AB' fino a farlo coincidere con AB , si ha l'andamento reale del M_f nel tratto AB , come si vede nella pagina precedente.



A distanza di 2,66 m da A il M_f raggiunge dunque il suo massimo valore e poiché la legge di variazione di M_f è, a causa del carico ripartito:

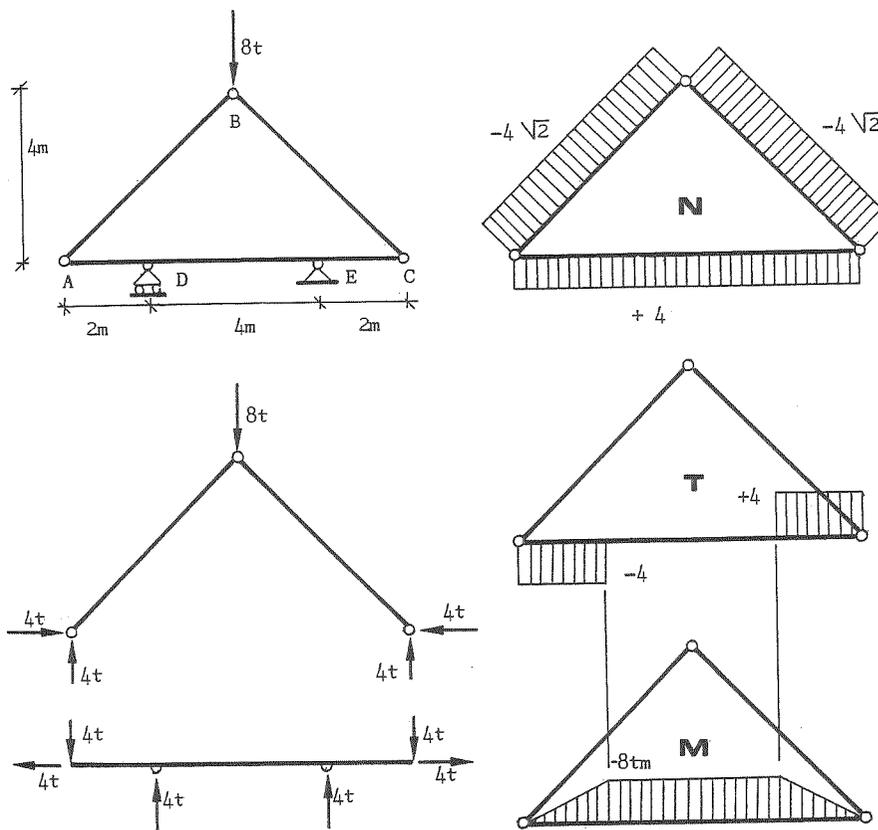
$$R_a \cdot x - \frac{p x^2}{2} = \frac{16}{3} x - \frac{2 x^2}{2}$$

sostituendo $x = 2,66$ si ha $M_{max} = 7,1 \text{ tm}$ mentre per $x = 6$ vale (nel punto B e, per simmetria, in C), -4 tm . Come si vede dal diagramma, in prossimità degli appoggi B e C risultano tese le fibre superiori. Nel tratto CD , con procedimento analogo si trova che si ha un M_{max} a una distanza di 2,82 m da D e che il valore di tale M_{max} è 16 tm.

Esercizio 16

Reazioni e diagrammi della struttura simmetrica in figura.

Parte portante è la trave DE , mentre l'arco a tre cerniere ABC è portato.



Esercizio 17

Reazioni e diagrammi di sollecitazione della struttura in figura.

Nelle strutture composte (come in questo caso) bisogna distinguere la parte portante (le cui reazioni sono fornite dal terreno) dalla parte portata (le cui reazioni sono fornite dalla parte portante o da parte portante e terreno). In questo caso è portante la mensola BEC ed è portato l'arco a tre cerniere ADB la cui reazione in B è fornita dalla mensola BEC .

AZIONI MUTUE E REAZIONI AI VINCOLI (fig. 1)

Il sistema può essere scomposto nell'arco a tre cerniere e nella trave incastrata con l'avvertenza che la reazione dell'arco a tre cerniere in B si trasforma, cambiata di disegno, in azione mutua per la mensola.

(In altre parole l'arco ADB spinge di 6 tonn. sulla mensola BEC).

TAGLIO (fig. 2)

La legge del taglio nel tratto DB è:

$$T_{(x)} = 6 - 3x$$

e si annulla nel punto $x = 2$.

MOMENTO FLETTENTE (fig. 3)

Legge di variazione nel tratto DF :

$$M_x = 6x - 3x^2/2$$

Legge di variazione nel tratto EF (origine di x'' in E):

$$M_{x''} = 3x''^2/2$$

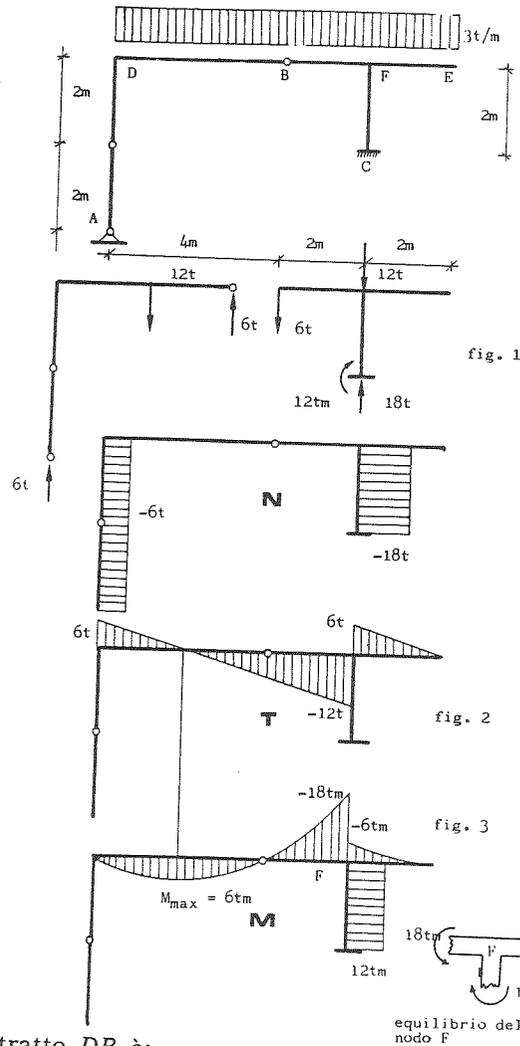


fig. 1

fig. 2

fig. 3

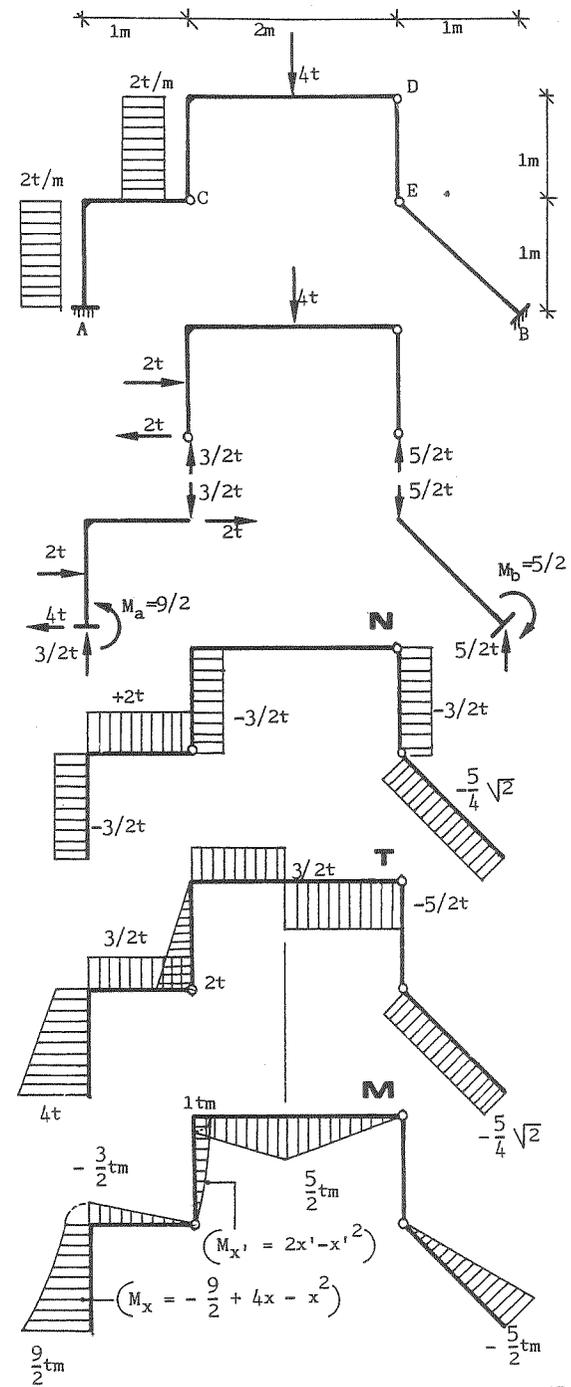
equilibrio del nodo F

Esercizio 18

Reazioni e diagrammi della struttura in figura.

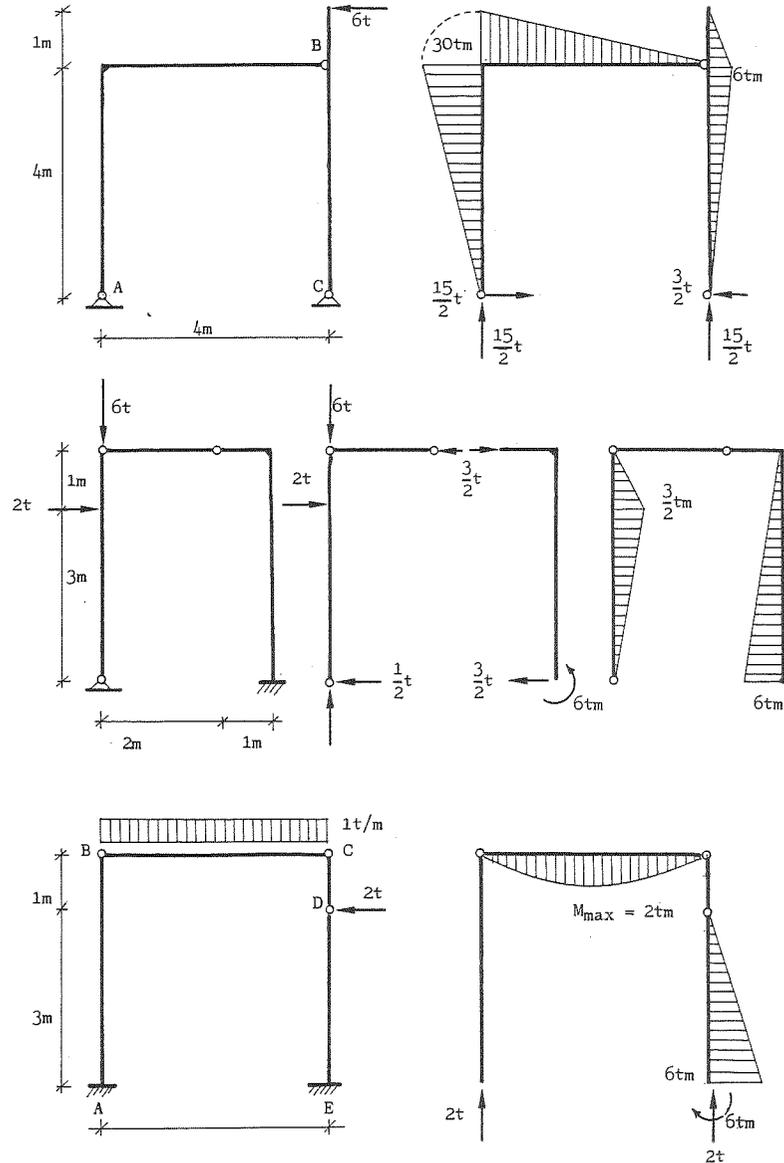
La parte portata è l'arco a tre cerniere CDE , mentre sono portanti le due mensole EB e CA .

Reazioni vincolari ed azioni mutue (il sistema può essere scisso in un arco a tre cerniere e due mensole). Nel tracciare i diagrammi di sollecitazione bisogna tenere presente la relazione analitica tra carico, taglio e momento flettente: quando il carico è ripartito il taglio varia con legge lineare e il momento con legge parabolica.



Esercizio 19

Reazioni vincolari e diagrammi del momento flettente dei seguenti telai isostatici:



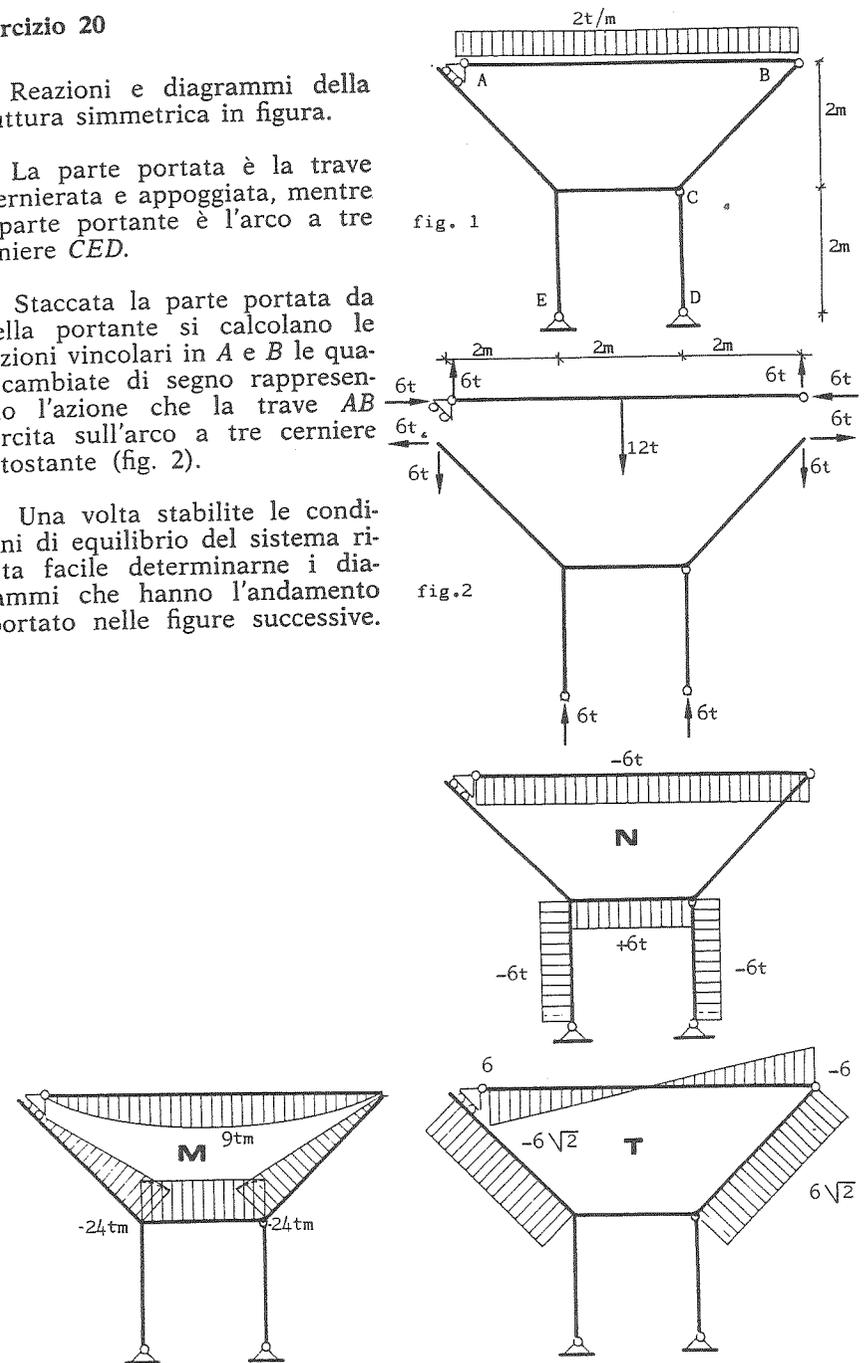
Esercizio 20

Reazioni e diagrammi della struttura simmetrica in figura.

La parte portata è la trave incernierata e appoggiata, mentre la parte portante è l'arco a tre cerniere CED.

Staccata la parte portata da quella portante si calcolano le reazioni vincolari in A e B le quali, cambiate di segno rappresentano l'azione che la trave AB esercita sull'arco a tre cerniere sottostante (fig. 2).

Una volta stabilite le condizioni di equilibrio del sistema risulta facile determinarne i diagrammi che hanno l'andamento riportato nelle figure successive.



Esercizio 21

Trovare le reazioni vincolari e i diagrammi di sollecitazione del sistema in figura, sollecitato da un carico ripartito di 2 t/m.

REAZIONI VINCOLARI

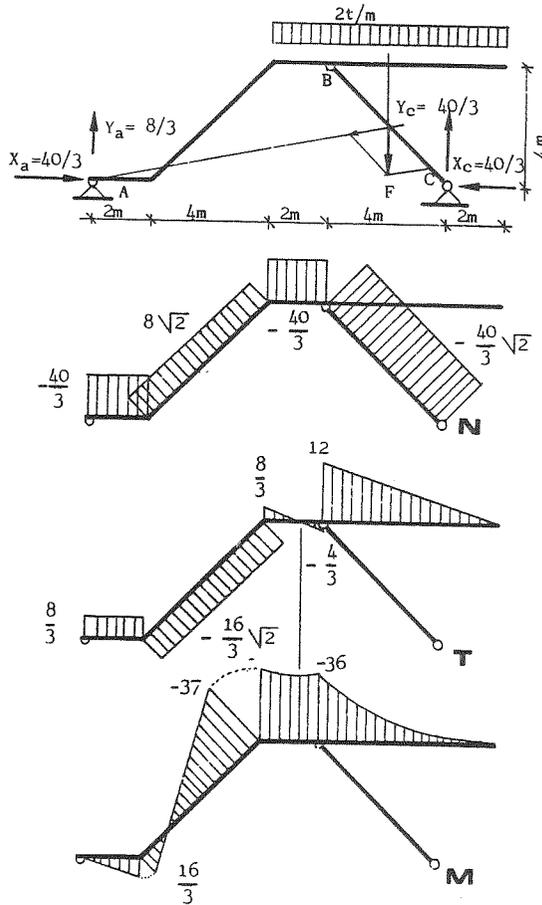
Il sistema può essere considerato come un arco a tre cerniere oppure come una sola trave *DABE* incernierata in *A* e vincolata in *C* attraverso la biellica presenta quattro incognite, costituite dalle (o pendolo) *BC*. La determinazione grafica delle reazioni si fa perciò tenendo conto che una reazione dovrà avere la direzione di *BC*, e di conseguenza R_a passerà per *A* e il punto d'incontro della direzione di R_b con la retta d'azione del carico concentrato nel baricentro (*F*). Il problema è così ricondotto alla scomposizione di un vettore secondo due direzioni (v. figura). La soluzione analitica presenta quattro incognite, costituite dalle componenti verticali e orizzontali di R_a e R_b . Bisogna quindi impostare altrettante equazioni. Si possono infatti scrivere tre equazioni ordinarie ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $M_a = 0$) ed una ausiliaria, dedotta dalla constatazione che, affinché l'asta *BC* sia in equilibrio, si debbono annullare i momenti delle forze agenti su questo tratto rispetto alla cerniera *B* (vincolo interno). Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= X_a + X_c = 0 & \Sigma M_a &= 16 \cdot 10 - Y_c = 0 \\ \Sigma Y &= Y_a + Y_c - 16 = 0 & \Sigma M_b &= X_c \cdot 4 - Y_c \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

Si può constatare dalla prima e quarta equazione che $X_c = Y_c = X_a$. Dalla terza e seconda equazione si ottiene allora:

$$Y_c = \frac{40}{3} = X_c = X_a; \quad Y_a + \frac{40}{3} - 16 = 0; \quad Y_a = \frac{8}{3}$$

I diagrammi poi hanno l'andamento indicato nelle figure.



Esercizio 22

Trovare le reazioni vincolari della trave in figura, vincolata da un carrello e un doppio pendolo.

Se togliamo i vincoli e li sostituiamo con le relative reazioni o incognite (la cui direzione è però nota), otteniamo un sistema di forze (v. figura) cui possiamo applicare le tre equazioni cardinali della statica.:

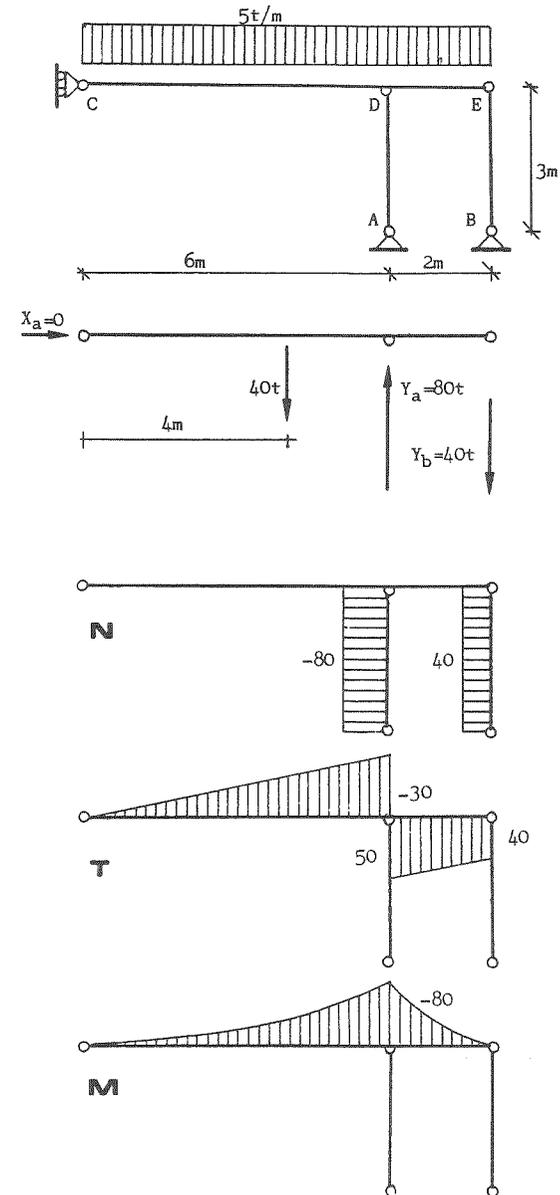
$$\begin{aligned} \Sigma M_c &= 0 \\ -40 \cdot 4 + Y_a \cdot 2 &= 0 \\ Y_a &= 80 \\ Y_b &= 40 \end{aligned}$$

Naturalmente, non essendoci altre forze orizzontali si avrà $X_a = 0$.

Verifica:

$$\begin{aligned} \Sigma M_c &= 0 \\ 4 \cdot 40 + 40 \cdot 8 - 8 \cdot 6 &= 0 \end{aligned}$$

I diagrammi hanno l'andamento in figura.



Esercizio 23

Reazioni e diagrammi di sollecitazione della struttura in figura.

La struttura non è scomponibile in sistemi semplici (travi, mensole, archi a tre cerniere).

In tali casi si determinano prima le reazioni ai vincoli esterni (in questo caso si tratta di una struttura incernierata e appoggiata) e poi si determinano le azioni mutue trasmesse dalla struttura in corrispondenza di un vincolo interno.

Le reazioni in A e B sono ovviamente verticali e pari a 2 tonnellate.

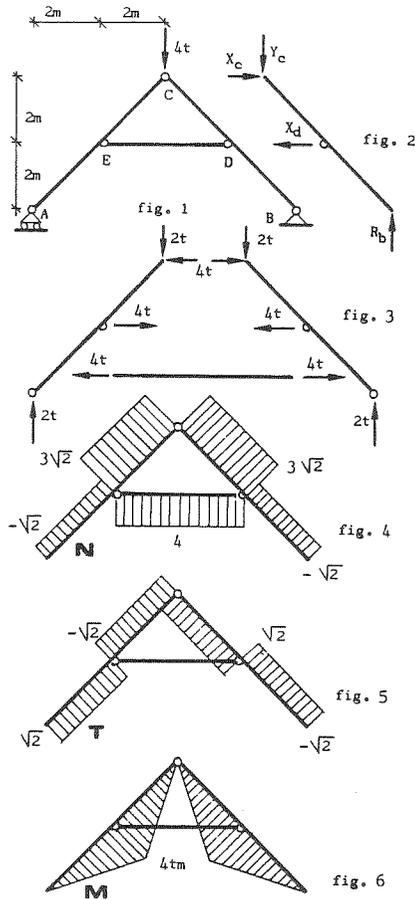
Determiniamo ora l'azione che l'asta ED trasmette, attraverso la cerniera D , alla parte CB .

Tale azione sarà sicuramente orizzontale in quanto ED si comporta come un pendolo, ed avrà direzione verso sinistra. Isoliamo allora il tratto CB sostituendo ai vincoli tolti le corrispondenti reazioni (note o incognite, come in fig. 2).

Con questo schema risulta chiaro che, imponendo l'equilibrio alle rotazioni intorno a C , si può determinare immediatamente X_d :

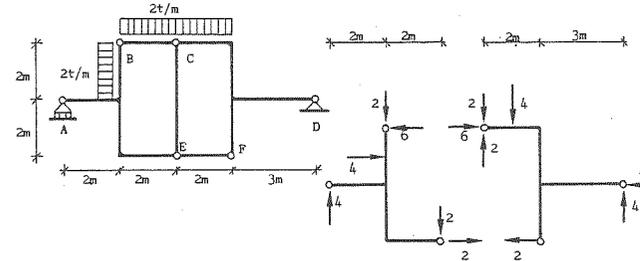
$$\begin{cases} \Sigma M_{c(BC)} = 0 \\ 2 X_d - 8 = 0 \\ X_d = 4 \end{cases}$$

da cui $X_c = 4$ e $Y_c = 2$. Essendo ora note tutte le forze agenti all'interno della struttura (fig. 3) è facile determinare i diagrammi di sollecitazione (fig. 4, 5 e 6). Tali diagrammi non si sarebbero potuti tracciare senza conoscere X_d . Se per esempio avessimo fatto la risultante relativa alla sezione immediatamente precedente la cerniera B , avremmo trovato una forza verticale di 2 t (partendo dall'estremo B) equilibrata da due forze provenienti dall'asta ED e dalla restante parte di BC . Come è noto è possibile equilibrare una forza data con altre due forze in infiniti modi e quindi il problema sarebbe rimasto indeterminato.



Esercizio 24

Reazioni ai vincoli (interni ed esterni) e diagrammi di sollecitazione della struttura in figura. La struttura è isostatica: facendo infatti il conto dei gradi di libertà si trova che essi sono 15 come i gradi di vincoli (le cerniere in C e in E tolgono ciascuna 4 gradi di libertà). Si noti che le aste CE ed EF si comportano come pendoli interni. Possiamo allora isolare i tratti ABE e CFD come in fig. 2 e (introdotte le reazioni incognite) studiare il loro equilibrio. Sono note immediatamente le reazioni



dei vincoli esterni del sistema che si comporta, nel suo complesso, come una struttura vincolata in A da un appoggio semplice e in D da una cerniera. Si sono poi concentrate nel baricentro dei diagrammi di carico le forze esterne. L'azione verticale del tratto BC sul resto della struttura si ripartisce, come è ovvio, in una forza di 2 tonnellate in B e 2 tonnellate in C . Facendo la somma dei momenti rispetto al polo E del tratto AEB si ottiene il valore di X_b (uguale poi a X_c):

$$\Sigma M_{e(AEB)} = 16 + 12 - 4 - 4 X_b = 0 \text{ da cui } X_b = 6 = X_c$$

e dall'equilibrio alle forze orizzontali del tratto ABE si ricava X_e (uguale a X_f):

$$\Sigma X_{(ABE)} = X_e + 4 - 6 = 0 \text{ da cui } X_e = 2 = X_f$$

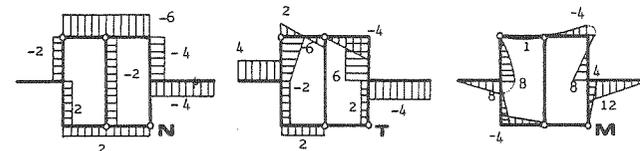
Facendo ora il momento rispetto al polo B del tratto ABE si ottiene Y_e (uguale a Y_c):

$$\Sigma M_{b(ABE)} = 8 - 4 + 2 Y_e - 8 = 0 \text{ da cui } Y_e = 2 = Y_c$$

Come verifica possiamo fare il momento rispetto a D del tratto CFD :

$$\Sigma M_{d(CFD)} = 4 + 10 + 12 - 10 - 16 = 0.$$

Note ora le reazioni ai vincoli e le azioni mutue della struttura, risulta facile disegnare i diagrammi che hanno l'andamento e i valori indicati dalle figure. (Si noti che non era possibile disegnare i diagrammi senza conoscere le azioni mutue che la struttura si scambia nei vincoli interni.)



Esercizio 25

Reazioni e diagrammi di sollecitazione dell'arco semicircolare in figura di raggio R , sollecitato da una forza F applicata in A .

La reazione verrà fornita dalla cerniera B e sarà uguale e contraria ad F .

SFORZO NORMALE

Assumiamo un sistema di riferimento come in fig. 2, individuando una generica sezione S con l'angolo α che essa forma con l'orizzontale. Lo sforzo normale sarà dato dalla componente normale all'asse dell'arco (fig. 3) e cioè:

$$N_s = -F \sin \alpha$$

Tale legge di variazione mostra come nella sezione iniziale ($\alpha = 0$) lo sforzo normale sia nullo, e come esso sia massimo in chiave ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) dove N vale:

$$N_c = -F \sin \frac{\pi}{2}$$

$$N_c = -F$$

Il diagramma sarà allora quello di fig. 4.

TAGLIO

Similmente per il taglio si avrà:

$$T_s = -F \cos \alpha$$

Il diagramma risultante (fig. 5) avrà valore massimo in A e B ($\alpha = 0$) e si annullerà in chiave.

MOMENTO FLETTENTE

Conviene assumere il riferimento cartesiano di fig. 6. Il momento in una sezione generica varrà $M_s = -F \cdot y$ dove y vale (equazione di una circonferenza con centro C):

$$C \equiv (R, 0), y = \sqrt{2Rx - x^2}$$

da cui $M_s = -F \sqrt{2Rx - x^2}$

Il valore massimo si ha per $x = R$ ($M_{max} = -FR$).

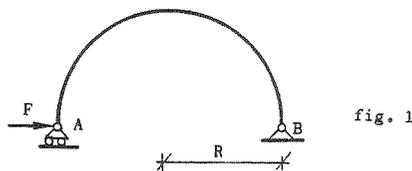


fig. 1

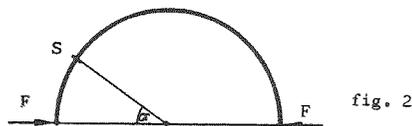


fig. 2

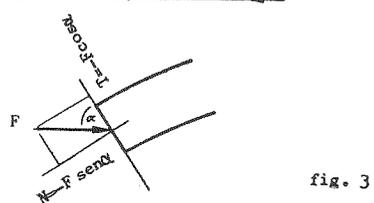


fig. 3

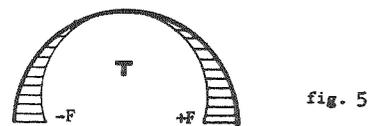


fig. 5



fig. 4

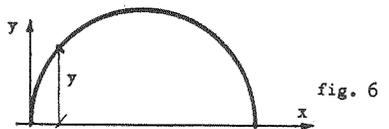


fig. 6

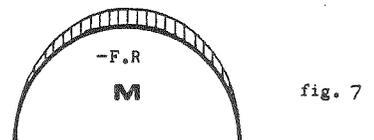
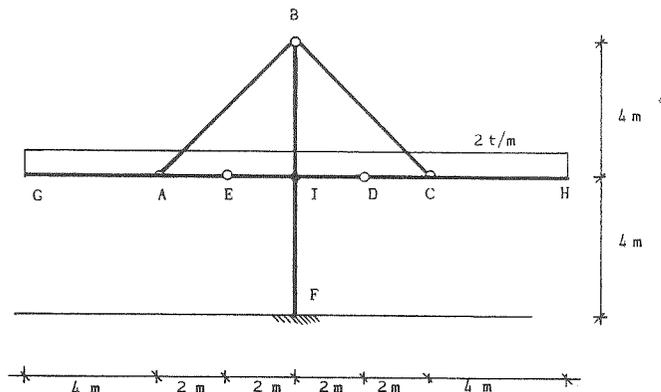


fig. 7

Esercizio 26

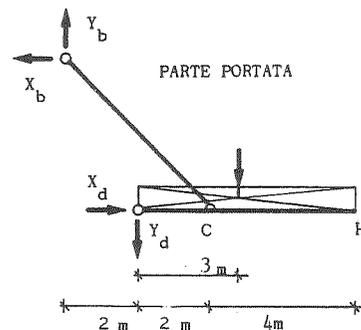
Studiare il comportamento statico e i diagrammi di sollecitazione della struttura in figura che schematizza una copertura di tipo indu-



striale usata quando è necessario lasciare libero il perimetro dell'edificio.

La parte portante è la $EBDF$, mentre risultano portati gli archi a tre cerniere BDH e BEG .

Data la simmetria della struttura studieremo dapprima la sola parte BDH . Successivamente riporteremo le azioni mutue di BDH e quelle (simmetriche) di BEG sulla parte portante $EBDF$.



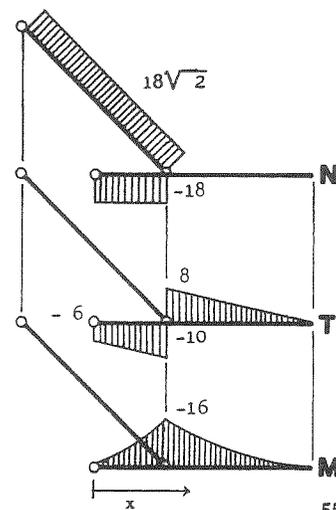
TRATTO BDH

L'asta BC , essendo caricata solo sui nodi, si comporta come pendolo: azioni e reazioni avranno cioè la direzione della retta passante per B e C . Essendo tale retta inclinata di 45° rispetto all'orizzontale, si avrà:

$$X_b = Y_b$$

Facendo allora la somma dei momenti rispetto alla cerniera D si avrà l'equazione in una sola incognita:

$$\begin{aligned} \sum M_d = 0 \text{ e cioè} \\ 2Y_b + 12 \cdot 3 - 4X_b = 0 \\ -2Y_b + 36 = 0 \\ Y_b = 18 \\ X_b = 18 \end{aligned}$$



Dall'equilibrio delle forze verticali si ricava poi Y_d :

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= 0 \\ Y_b - 12 - Y_d &= 0 \\ Y_d &= 6\end{aligned}$$

e dall'equilibrio delle forze orizzontali si ricava X_d :

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 \\ X_b - X_d &= 0 \\ X_d &= 18\end{aligned}$$

SFORZO NORMALE

Nel tratto BC lo sforzo normale sarà di trazione e il suo valore è dato dalla somma delle componenti delle reazioni Y_b e X_b secondo la direzione di BC :

$$\begin{aligned}N_{(bc)} &= (18 + 18) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ N_{(bc)} &= 18\sqrt{2}\end{aligned}$$

In DC invece lo sforzo normale è negativo e vale -18 t.

TAGLIO

Essendo costante la funzione del diagramma di carico, le leggi di variazione del diagramma di taglio saranno funzioni lineari.

Nel tratto DC la funzione del diagramma di taglio è:

$$T_{(dc)} = -6 - 2x$$

per cui nel punto immediatamente a sinistra di C si avrà:

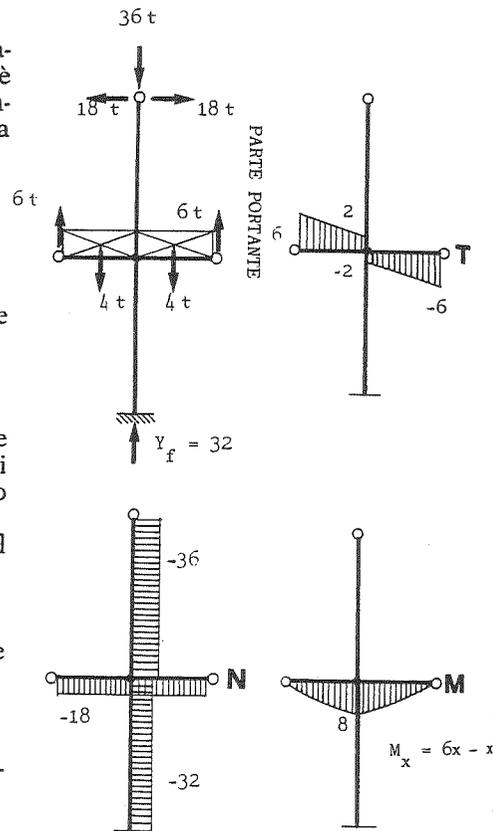
$$T_{(ch)} = -6 - 2x + 18$$

Nel punto immediatamente a destra di C si avrà allora:

$$\begin{aligned}T_c &= -6 - 4 + 18 \\ T_c &= 8\end{aligned}$$

La funzione si annulla nel punto H , dove il taglio deve essere necessariamente nullo per l'equilibrio della sezione estrema:

$$\begin{aligned}T_h &= -6 - 12 + 18 \\ T_h &= 0\end{aligned}$$



MOMENTO FLETTENTE

Il momento flettente sarà sempre negativo, come si può intuitivamente constatare considerando la deformazione della trave DH .

Nel tratto DC la funzione del momento risulta:

$$\begin{aligned}M_{(dc)} &= -6x - \frac{2x^2}{2} \\ M_{(dc)} &= -6x - x^2\end{aligned}$$

e nel punto C ($x = 2$) il momento varrà:

$$\begin{aligned}M_c &= -12 - 4 \\ M_c &= -16 \text{ tm}\end{aligned}$$

Nel tratto a destra di C la funzione del momento sarà:

$$M_{(ch)} = -6x - x^2 + 18(x - 2)$$

e si annullerà nell'estremo H (dove $x = 6$):

$$\begin{aligned}M_h &= -36 - 36 + 72 \\ M_h &= 0\end{aligned}$$

TRATTO $EBDF$

Come al solito, si riportano sulla parte portante le azioni mutue provenienti dalle parti portate (in questo caso simmetriche) e si studia l'equilibrio generale del sistema ottenuto sotto l'azione delle forze attive e delle reazioni vincolari.

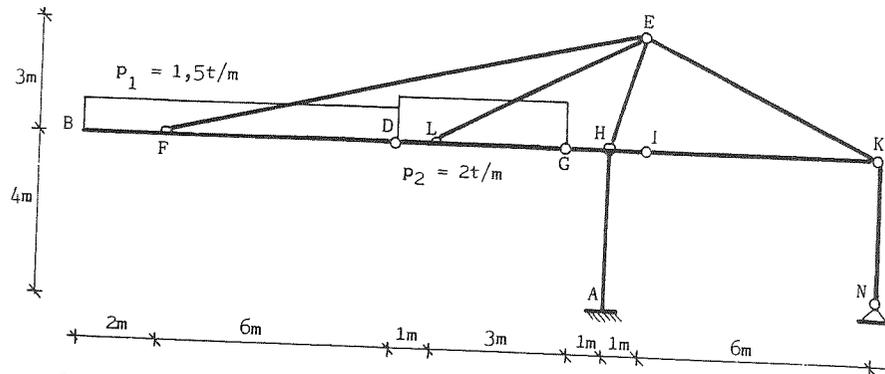
Si può facilmente constatare che, data la simmetria delle forze agenti, l'incastro in F non avrà momento reagente né reazione orizzontale.

La reazione verticale sarà invece:

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= 0 \\ Y_f + 12 - 36 - 8 &= 0 \\ Y_f &= 32\end{aligned}$$

I diagrammi di sollecitazione, riportati in figura, si possono facilmente tracciare partendo da un estremo qualsiasi della struttura.

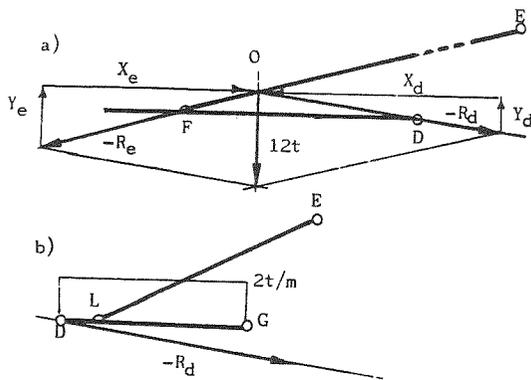
Esercizio 27



Studiare il comportamento statico e i diagrammi di sollecitazione della struttura in figura (1).

Si può constatare che il sistema è formato da una serie di archi a tre cerniere e una trave incastrata in A. Se isoliamo infatti la parte *BFDE*, vediamo che essa si comporta come un arco a 3 cerniere dei cui semiarchi uno solo è caricato (il tratto *FE*, essendo scarico, si comporterà come un pendolo). E' così possibile determinare le reazioni ai vincoli *D* ed *E* e i diagrammi di sollecitazione di questo tratto. Simile è il comportamento statico della parte *DGLE*, ma bisogna tenere presente che le reazioni in *D* della parte *BD* si trasformano in azioni sul tratto *DG*. Ancora archi a tre cerniere sono *HEK* ed *IKN*, mentre *AGI* è una trave incastrata in A. Il sistema è allora scomponibile in 4 archi a tre cerniere (parti portate) e una trave incastrata (parte portante).

Per comprendere come il comportamento di questi tratti si possa considerare indipendente ai fini della determinazione dei diagrammi di sollecitazione, pur di considerare le azioni mutue che i tratti si trasmettono, tracciamo graficamente le reazioni del primo tratto rispetto ai vincoli *D* ed *E*. Concentrata la risultante del carico ripartito nel baricentro si scompone *R* secondo *FE* (direzione del pendolo scarico) ed *OD* (dove *O* è l'intersezione di *R* con



(1) Una struttura assimilabile allo schema dell'esercizio è quella dell'hangar di Fiumicino di Morandi, riportata alla TAV. 1 e 2.

FE). Chiamate $-R_e$ e $-R_d$ le forze ottenute (vedi fig. a), dall'equilibrio di $-R_e$ si ottiene Y_e ed X_e mentre dall'equilibrio di $-R_d$ si ottiene Y_d e X_d . R_d è la reazione trasmessa da *D* e R_e è la reazione in *E*. L'insieme *FE DB* è quindi in equilibrio e se ne possono determinare i diagrammi. Quando si passa al sistema successivo *DGLE*, bisogna tenere presente la forza $-R_d$, cioè l'azione che il sistema precedente trasmette e al cui equilibrio debbono provvedere forze applicate, sul tratto *DGLE*.

TRATTO B D F E

REAZIONI AI VINCOLI

Perché il tratto sia in equilibrio deve essere nulla la somma dei momenti rispetto a un qualsiasi punto, ad esempio *D*, e tenendo presente che il sistema è un arco a tre cerniere in cui il pendolo *FE* è scarico, la somma dei momenti del tratto *EF* rispetto a *F* deve essere nulla. Si ha allora:

$$1) \sum M_{f(EP)} = 0$$

$$X_e \cdot 3 - Y_e \cdot 12 = 0$$

$$X_e = 4 Y_e \quad (1)$$

$$2) \sum M_d(\text{totale}) = 0$$

$$X_e \cdot 3 - Y_e \cdot 6 - 12 \cdot 4 = 0$$

$$12 Y_e - 6 Y_e = 48$$

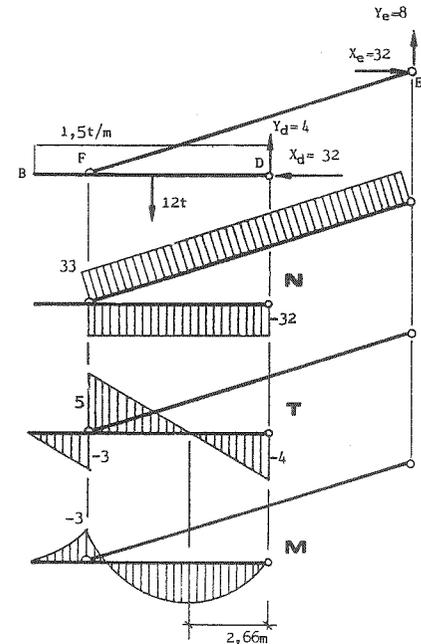
dalla prima e seconda equazione si ricava:

$$Y_e = 8 \text{ t} \quad X_e = 32 \text{ t}$$

poiché la somma delle componenti orizzontali deve essere nulla si ha poi:

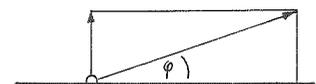
$$\sum X = 32 + X_d = 0 \text{ da cui } X_d = -32$$

$$\sum Y = 0; 8 \text{ t} - 12 + Y_d = 0; Y_d = 4 \text{ t}$$



(1) Esprimendo in funzione di X_e si ha $Y_e = \frac{1}{4} X_e$, dove $\frac{1}{4}$ è la

tangente dell'angolo che il vettore R_e forma con l'asse *x*. Al variare dell'angolo φ che il pendolo forma con *DB* varia anche il rapporto tra X_e e Y_e e quindi X_d e Y_d . Questo è importante in fase di progetto perché permette di controllare le componenti tangenziali e normali rispetto a *FD*.



SFORZO NORMALE

Poiché R_c ha la direzione del pendolo FE , FE ha solo sforzo normale di trazione pari alla componente secondo EF di X_c e Y_c , cioè:

$$\sqrt{32^2 + 8^2} = 33$$

Poiché su F viene trasmessa da FE una $X_f = 32$ t dovuta a X_c , su FD si ha una compressione di 32 t.

SFORZO DI TAGLIO

Su FE , come si è visto, ci sono solo sollecitazioni normali e quindi il taglio è nullo. In BD , partendo da D si ha $T = -4$ in D , e un diagramma che varia con la legge lineare $T_x = -4 + 1,5x$ (dove x è la distanza della sezione considerata da D). In F il taglio varrà allora 5 ($x = 6$) e si annulla in $x = \frac{8}{3} = 2,66$, valore da tenere presente per il diagramma dei momenti (mom. massimo). Nel tratto BF la legge sarà poi $T'_x = -4 + 1,5x - 8$ e, come si può constatare, si annulla in B .

MOMENTO FLETTENTE

Nel tratto BF la legge di variazione sarà $M_x = -px \cdot \frac{x}{2} = -\frac{1,5x^2}{2}$

(dove x questa volta è la distanza da B). In F si ha $M_f = -3$. Nel tratto FD invece interviene $Y_f = Y_c = 8$ t.

Possiamo calcolare la legge di variazione di M_f partendo da D e chiamando x la distanza di una generica sezione da D . La legge sarà allora:

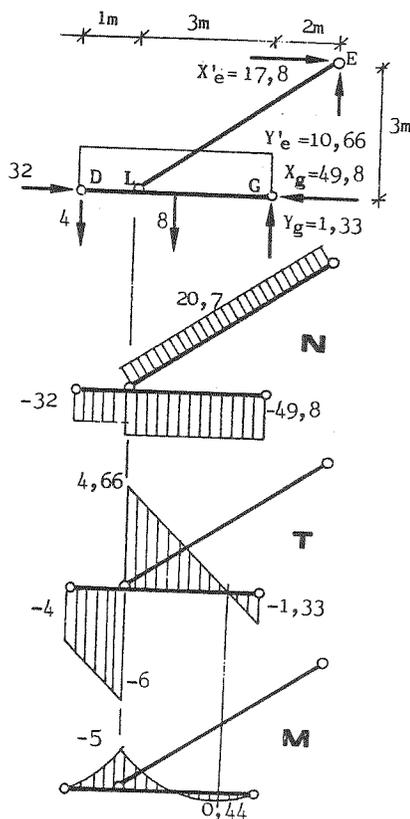
$$M_f = -4x + \frac{px^2}{2} = -4x + \frac{3}{4}x^2$$

Nel punto $x = 2,66$ il valore del momento sarà massimo, mentre, per simmetria, in $x = 2 \cdot 2,66 = 5,32$ si annullerà per diventare poi negativo.

TRATTO $DGLE$

REAZIONI AI VINCOLI

Come nel tratto precedente, anche in questo il problema è la determinazione, nell'arco a tre cerniere $DGLE$, delle componenti Y_g , X_g di R_g e Y'_e , X'_e di R'_e . (R'_e per distinguere le due reazioni in E relative



l'una al tratto $BDFE$ e l'altra a $DGLE$). Possiamo perciò scrivere due equazioni di equilibrio rispetto alle rotazioni, una esprime la condizione che il pendolo LE non ruoti intorno ad L e l'altra che l'intero sistema non ruoti rispetto a un punto qualsiasi, ad esempio G . Si ha allora:

$$1) \Sigma M_{L(LE)} = X'_e \cdot 3 - Y'_e \cdot 5 = 0 \quad X'_e = \frac{5}{3} Y'_e$$

$$2) \Sigma M_g(\text{totale}) = 0$$

$$X'_e \cdot 3 - Y'_e \cdot 2 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 0$$

Dalle due equazioni si ricava:

$$Y'_e = \frac{32}{3} = 10,66; \quad X'_e = \frac{160}{9} = 17,8$$

La componente X_g dovrà allora equilibrare l'azione di 32 t trasmessa da $BDFE$ e la $X'_e = 17,8$ t. Essa sarà di modulo:

$$32 + 17,8 = X_g = 49,8$$

mentre Y_g , per l'equilibrio dei carichi verticali varrà:

$$4 + 8 - 10,66 = Y_g = 1,33.$$

SFORZO NORMALE

In DL per l'azione trasmessa varrà 32 t, mentre in LG $32 + X'_e = 49,8$ t. Nel tratto EL varrà $\sqrt{X'^2_e + Y'^2_e} \approx 20,7$.

TAGLIO

Vale 4 t in D a causa di $-Y_d = 4$ t ed è negativo. Varia poi con legge lineare $T_x = 4 + px$ fino ad L dove vale -6 t ($x = 1$). L'ascisse x rappresenta in questo caso la distanza di una generica sezione in DL da D . Per tracciare il diagramma in LG partiamo da G dove $T = -1,33$ t = Y_g e, detta x' la distanza di una generica sezione compresa tra L e G , la legge di variazione di T sarà in questo caso:

$$T'_x = -1,33 + px' = 2x' - 1,33.$$

Si ha allora $T = 0$ per $x' = 0,66$ mentre per $x' = 3$ si ha $T = 4,66$ t. Il tirante LE non è sollecitato al taglio avendo solo sforzo assiale.

MOMENTO FLETTENTE

Partendo dall'estremo libero G , saranno positivi i momenti levogiri perché tendono le fibre inferiori. La legge di variazione di M'_x sarà in LG $M'_x = 1,33x' - px' \cdot \frac{x'}{2} = 1,33x' - \frac{x'^2}{2}$.

Dall'andamento del taglio si nota che per $x' = 0,66$ m. si ha un minimo della funzione di M'_x . Sostituendo si trova che in questo punto

$M_l = 0,44$. La funzione, per simmetria, si annulla in $x' = 0,66 + 0,66$ e in $x' = 3$ raggiunge il valore $-5,01$ tm. Sapendo poi che il M_l si deve annullare in D si conosce anche l'andamento del momento flettente nel tratto DL . Il tratto LE è sollecitato da una forza assiale che da, per ogni sezione su LE , momento nullo (essendo nullo il braccio). Tale tratto sarà allora solo sollecitato da uno sforzo di trazione.

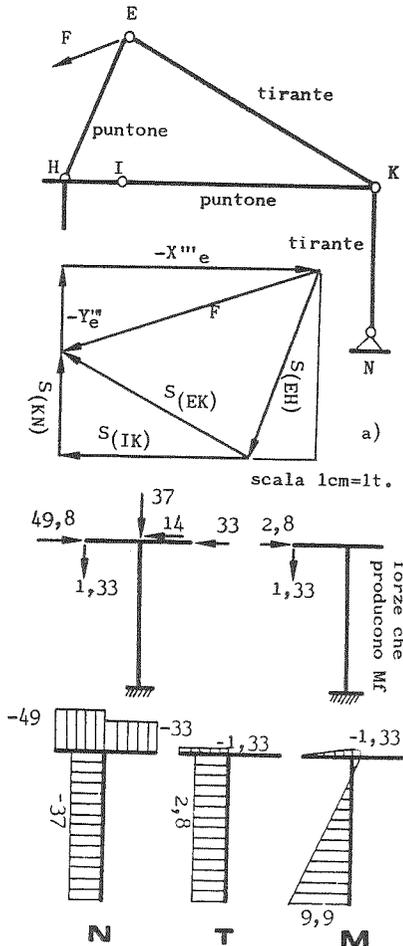
TRATTO HEK E IKN

Il tratto HEK è un arco a tre cerniere sollecitato dall'azione mutua che FE ed LE trasmettono in E . Tale azione è la somma delle reazioni $R_e + R'_e$ cambiata di segno. Indicate con Y_e''' e X_e''' le componenti della somma di R_e e R'_e , si sono trovati graficamente (fig. a) gli sforzi nel punto HE e nel tirante EK . Componendo infatti:

$$-Y_e''' = -(8 + 10,66) \text{ t e}$$

$$X_e''' = -(32 + 17,8) \text{ t}$$

si trova la forza F agente in E , che decomposta secondo le direzioni di EH ed EK , da lo sforzo in queste aste. Lo sforzo dell'asta EK , decomposta a sua volta secondo le direzioni di IK e KN , da poi lo sforzo nelle rispettive aste. Si noti che lo sforzo di trazione in KN (circa 19 t), è molto rilevante in quanto agente verticalmente sulle fondazioni, che non possono sopportare, a meno di costosi accorgimenti, elevati sforzi di trazione. Di fatto si supplisce a questo inconveniente con opportune zavorre in K , e col peso della copertura in IK (non considerato nello schema). In definitiva sulla trave portante GIA , arrivano, da sinistra le sollecitazioni $-X_e'$ e $-Y_e'$, da destra lo sforzo $S_{(IK)}$ (circa 33 t) e dal puntone HE una forza di 40 t. Ricavando graficamente le componenti di $S_{(EK)}$ si trova che esse sono di 14 t (orizz.) e 37 t (vert.). Le forze che risultano in totale su AGI , tranne la componente verticale di $S_{(EK)}$ creano quasi una condizione di equilibrio e gli sforzi di flessione e taglio (lievi data l'entità della struttura) vengono equilibrati dall'incastro in A .

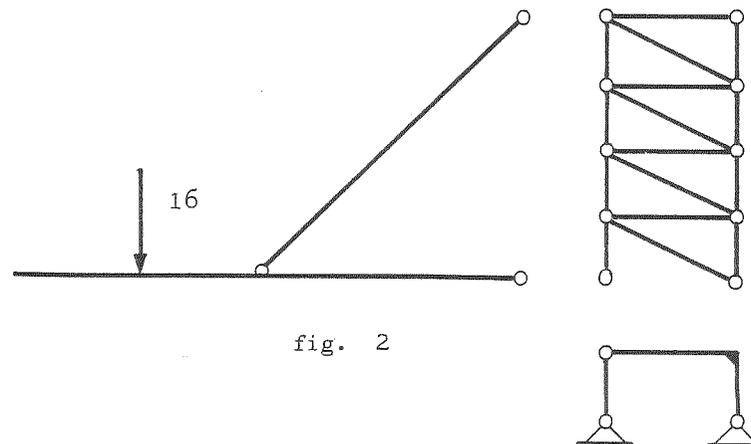
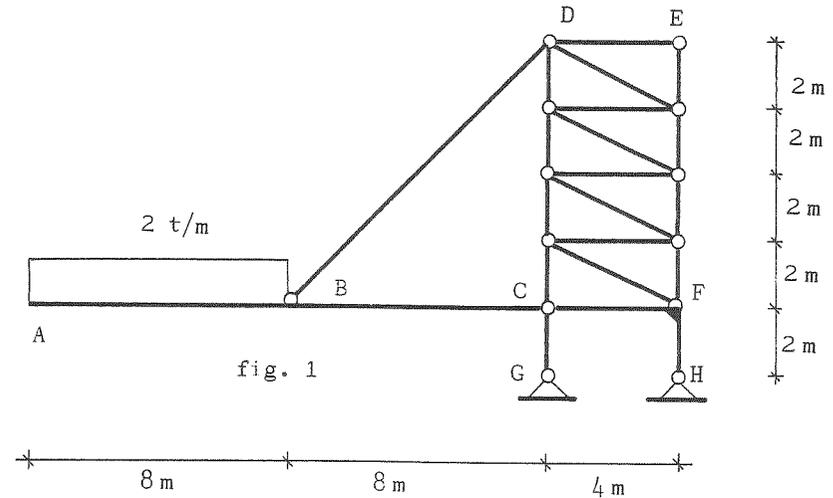


Esercizio 28

Studiare il comportamento statico e i diagrammi di sollecitazione della struttura in figura 1, che schematizza la struttura di un edificio multipiano cui è collegata la mensola AC (V. nota alla fine dell'esercizio).

La struttura è chiaramente isostatica e può essere scomposta (fig. 2) nell'arco a tre cerniere $ABCD$, nella struttura reticolare $CDEF$ e nell'arco a tre cerniere $GCFH$.

L'arco a tre cerniere $GCFH$ è la parte portante, mentre le altre due parti di struttura sono portate. Si noti che in F si trova un nodo rigido che rende continua la trave CFH , su cui è collocata una cerniera che



funziona da vincolo di secondo tipo unicamente per la parte di struttura sovrastante.

REAZIONI AI VINCOLI

Le reazioni che tengono il sistema in equilibrio verranno sviluppate dal pendolo GC e dalla cerniera H . Dalle equazioni cardinali della statica si ottiene:

$$\begin{aligned} \Sigma M_g = 0 & \text{ da cui } 16 \cdot 12 - Y_h = 0 & Y_h = 48 \text{ t} \\ \Sigma Y = 0 & \text{ da cui } & Y_g = 64 \text{ t} \\ \Sigma X = 0 & \text{ da cui } & X_g = 0 \text{ e } X_h = 0 \end{aligned}$$

Esaminiamo ora i diversi tratti di struttura considerando reazioni e azioni mutue.

TRATTO $ABCD$

L'asta BD , essendo caricata solo sui nodi, si comporta come un pendolo, per cui si avrà:

$$Y_d = X_d$$

Le reazioni ai vincoli saranno allora:

$$\Sigma M_c = 0$$

da cui:

$$16 \cdot 12 - 8X_d = 0$$

$$X_d = 24 \text{ t}$$

$$Y_d = 24 \text{ t}$$

$$\Sigma Y = 0$$

da cui:

$$Y_c = 8 \text{ t}$$

$$\Sigma X = 0$$

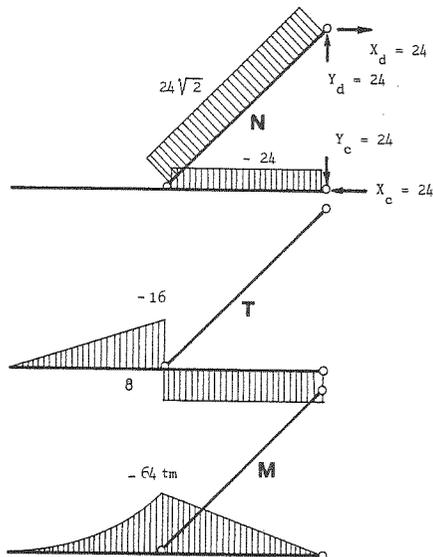
da cui:

$$X_c = 24 \text{ t}$$

I diagrammi di sollecitazione hanno l'andamento indicato in figura.

TRATTO $DECF$

Le forze agenti su questo tratto di struttura sono le azioni mutue trasmesse in D dall'arco a tre cerniere $ABCD$ e sono pari alle reazioni vincolari di $ABCD$ con verso opposto.



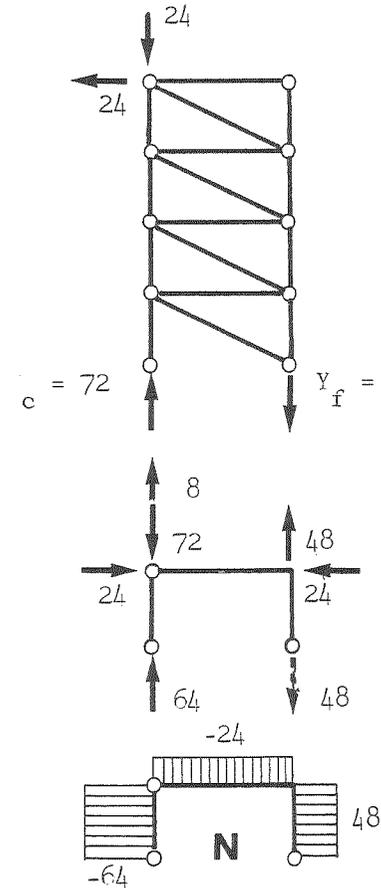
L'azione mutua trasmessa in C viene invece direttamente assorbita dalla parte portante $GCFH$.

Le reazioni vincolari saranno:

$$\Sigma M_c = 0 \quad \text{da cui} \quad 24 \cdot 8 - 4Y_f = 0 \quad Y_f = 48 \text{ t}$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{da cui} \quad Y_c = 72 \text{ t}$$

Le aste sono sollecitate da soli sforzi normali, facilmente determinabili con i metodi della statica grafica, o considerando questa parte di struttura come catena di archi a tre cerniere. Si noti che le aste diagonali sono tese (adatte quindi ad essere realizzate in acciaio) mentre le aste orizzontali (travi di solaio) sono compresse.



TRATTO GCFH

Le azioni in C sono mutate in parte dall'arco a tre cerniere ABCD (24 t. e 8 t.) e in parte dal tratto DECF (72 t.). In F invece si avranno le sole azioni mutue trasmesse da DECF.

Le reazioni ai vincoli G ed H debbono confermare i valori di Y_g e Y_h ricavati dall'equilibrio generale del sistema. Avremo infatti:

$$\Sigma X = 0 \quad \text{da cui} \quad X_h = 0$$

$$\Sigma M_g = 0 \quad \text{da cui} \quad 48 \cdot 4 - 4 Y_h = 0 \quad Y_h = 48 \text{ t}$$

e infine:

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{da cui} \quad Y_g = 64 \text{ t}$$

Risultano allora verificati i valori trovati precedentemente. Le sollecitazioni di taglio e momento flettente sono assenti, mentre il diagramma dello sforzo normale è rappresentato in figura.

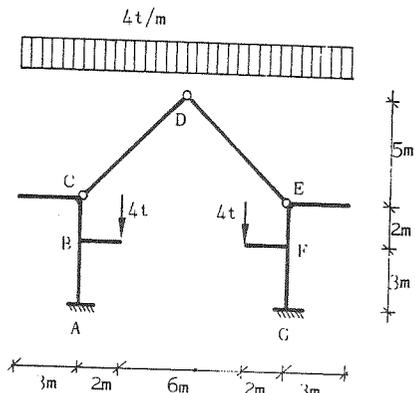
Nota. — Per un esempio di struttura assimilabile, nelle linee generali, a quella studiata, si vedano i disegni di H. Mayer per la Peterschule di Basilea, riportati nelle TAV. 3 e 4.

Il comportamento statico è simile, anche se non identico, trattandosi, nel progetto di Meyer, di una struttura iperstatica. Le aste diagonali sono tese in modo da sfruttare correttamente le possibilità dell'acciaio, mentre le sollecitazioni di compressione sono assorbite dai solai e dai pilastri di sinistra. Il nodo corrisponde al punto F dello schema dell'esercizio è irrigidito da controventature metalliche per assicurare la continuità tra trave e pilastro in un punto particolarmente delicato della struttura: è infatti attraverso questo nodo che la sollecitazione di trazione si trasmette a terra. Si noti inoltre che, non potendo il terreno di per se reagire a sollecitazioni di trazione, il blocco delle cucine (a destra in basso nella sezione) provvede a creare l'opportuno zavorramento che impedisce alla struttura di ribaltarsi.

Esercizio 29

Reazioni ai vincoli e diagrammi di sollecitazione della struttura in figura, caricata uniformemente con un carico $p = 4 \text{ t/m}$ e un carico concentrato pari a 4 t sulle mensole interne.

Lo schema strutturale in figura, (isostatico), è molto comune ai fabbricati industriali con carropon-te. Esso è costituito dall'arco a tre cerniere CDE (parte portata) e dai due tratti incastrati CBA ed EFG (parti portanti). Conviene considerare separatamente la parte portata da quella portante (il che semplifica i



calcoli) tenendo presente le azioni mutue che le due parti si trasmettono.

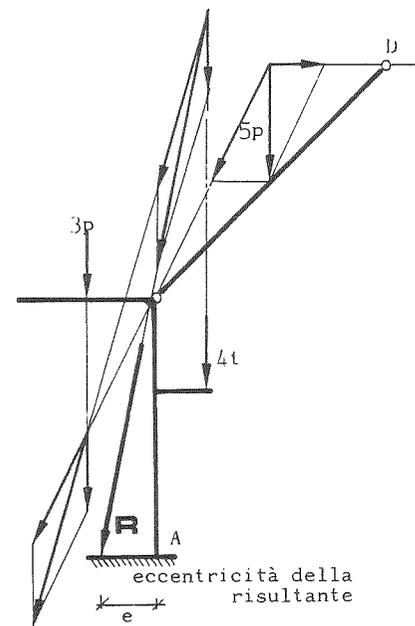
REAZIONI AI VINCOLI

Le incognite da determinare sono 3 nell'incastro A e 3 nell'incastro G. Considerando il sistema per intero bisognerebbe scrivere 6 equazioni in 6 incognite di cui 3 sono fornite dalle equaz. cardinali della statica e 3 ausiliarie. Si avrà cioè il sistema:

$$\text{equazione cardinale della statica} \begin{cases} \Sigma M_{(tot.)} = 0 \\ \Sigma X_{(tot.)} = 0 \\ Y_{(tot.)} = 0 \end{cases}$$

$$\text{equazione ausiliaria} \begin{cases} \Sigma M_{c(EFG)} = 0 & f(X_g \text{ ed } M_g) \\ \Sigma M_{d(DEFG)} = 0 & f(X_g, Y_g \text{ e } M_g) \\ \Sigma M_{c(CDEFG)} = 0 & f(X_g, Y_g \text{ e } M_g) \end{cases}$$

che risolto da le reazioni. Tuttavia conviene considerare dapprima CDE come isolato, determinarne le reazioni e i diagrammi di sollecitazione e poi passare a considerare le parti portanti, tenendo presente che le reazioni ai vincoli C ed E, rispetto alle parti CBA ed EFG (con segno cambiato), si trasformano in azioni mutue. La struttura è simmetrica, quindi basta considerare una parte a destra o a sinistra dell'asse di simmetria. Graficamente si può procedere come nella figura accanto, facendo passare la reazione in C per il punto d'incontro della retta d'applicazione della risultante del carico e la parallela all'orizzontale per D (operazione lecita solo per archi a 3 cerniere simmetricamente carichi). Componendo poi la azione $-R_c$ con $3p$ e $4t$ si trova una forza che non passa per A. Dal trasporto di questa forza in A si ricava la reazione e il momento reagente uguale e contrario a quello di trasporto.



TRATTO CDE

Il tratto CDE è un arco a tre cerniere caricato simmetricamente. Le aste CD e DE sono inclinate a 45° rispetto all'orizzontale.

REAZIONI VINCOLARI

Si possono trovare in due modi:

a) graficamente come in figura, ricordando che in un arco a 3 cerniere caricato simmetricamente e simmetrico di forma, le azioni mutue dei due semiarchi passano per l'orizzontale passante per D (retta o). Congiunta la o con la retta di azione di F (punto H in figura), la R_c passerà per CH. Col poligono di equilibrio si trova allora R_c e il simmetrico R_e;

b) analiticamente scrivendo tante equazioni quante sono le incognite (quattro), cioè 3 equazioni ordinarie e una ausiliaria esprimente la condizione che un semiarco (per esempio DE) non ruoti intorno a D. Si ha quindi:

$$\Sigma M_{c(10t)} = \frac{pl^2}{2} - Y_c \cdot l = 0 \quad \Sigma Y = 0; Y_c + Y_e - pl = 0$$

$$\Sigma M_{d(DE)} = -Y_e \cdot \frac{l}{2} + X_e \cdot f + \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \Sigma X = X_c + X_e = 0$$

Dove l è la luce dell'arco e f la freccia. Risolvendo si ricava:

$$Y_e = Y_c = 20 t = \frac{pl}{2}$$

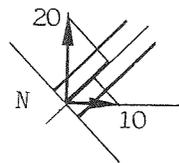
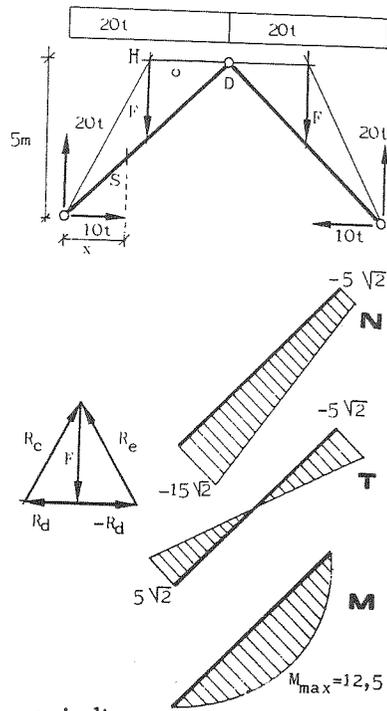
$$X_e = X_c = \frac{pl^2}{8f} \quad (\text{la componente orizzontale diminuisce cioè all'aumentare della freccia})$$

$$X_e = X_c = 10 t.$$

SFORZO NORMALE

E' dato dai componenti delle forze agenti secondo l'asse della struttura, cioè (R_a + R_c) cos 45° nel punto C in cui intervengono solo le reazioni, quindi:

$$N_c = -30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -15\sqrt{2}$$



Ma a causa del carico ripartito lo sforzo normale varia con legge lineare e, detta x la distanza di una generica sezione da C, tale legge sarà:

$$N_x = -15\sqrt{2} + px \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e in } D (x = 5) \text{ varrà } -5\sqrt{2} t.$$

TAGLIO

Lo stesso discorso si può ripetere per il taglio, con la differenza che ora i componenti presi in considerazione sono quelli secondo la normale all'asse di CD. La legge di variazione di T sarà:

$$T_x = Y_c \cdot \cos 45^\circ - X_c \cos 45^\circ - px \cos 45^\circ$$

Nel punto C (x = 0) si ha T_c = 5√2, in D (x = 5) si ha T_d = -5√2. Essendo la legge di variazione lineare il taglio si annulla in x = 2,5 (in questo punto si avrà M_{max}).

MOMENTO FLETTENTE

Rispetto alla generica sezione S sono uguali i bracci delle forze Y_c e X_c. In tale sezione si avrà allora:

$$M_x = 20x - 10x - \frac{px^2}{2}$$

($\frac{px^2}{2}$ è il contributo dovuto al carico ripartito in CS) e la legge di variazione sarà:

$$M_x = 10x - \frac{px^2}{2}; M_{max} = 12,5$$

TRATTO CBA

REAZIONI AI VINCOLI

Il tratto CD trasmette in C un carico verticale di 20 t e una spinta orizzontale di 10 t. Per trovare le reazioni nell'incastro A bisogna scrivere le equazioni di equilibrio, considerando il carico ripartito di 12 t su HC concentrato nel baricentro. Si ha allora:

$$\Sigma X = 0 \text{ da cui } X_a = 10 t.$$

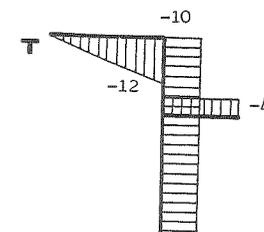
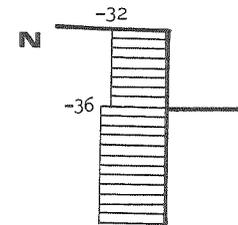
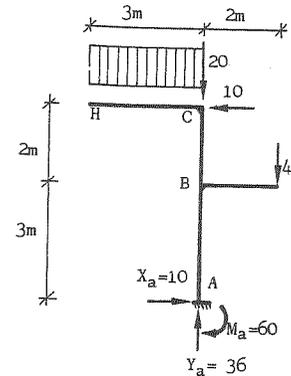
$$\Sigma Y = 0; Y_a - 12 - 20 - 4; Y_a = 36 t.$$

$$\Sigma M_a = 0; -12 \cdot 1,5 - 10 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + M_a = 0$$

da cui M_a = 60 tm (momento reagente in A).

SFORZO NORMALE

Nel tratto HC non vi sono componenti delle forze esterne secondo l'asse, e quindi N = 0.



Nel tratto CB si ha $N = 36$ t. Nel tratto BA lo sforzo normale di 36 t viene incrementato da 4 t trasmesse da BL , perciò:

$$N = 32 + 4 = 36 \text{ t}$$

Il tratto BL non ha sforzo normale.

TAGLIO

Chiamata x la generica distanza di una sezione S su HC da H , la legge di variazione del taglio è:

$$T(x) = -px = -4x$$

è cioè lineare e vale -12 t quando $x = 3$, cioè nel punto C . In CB lo sforzo tangenziale è dato dall'azione di 10 t ed è negativo perché tende a far ruotare in senso levogiro le sezioni. Poiché in EA non intervengono altre sollecitazioni tangenziali T varrà -10 t in tutto il tratto. Nel tratto BL si ha $T = -4$.

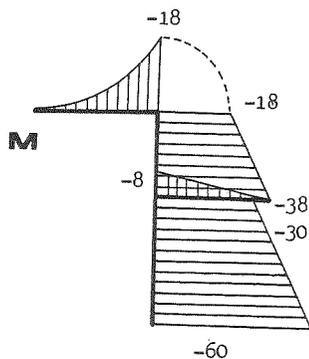
MOMENTO FLETTENTE

Nel tratto HC ricaviamo la legge del momento per integrazione della legge del taglio:

$$M_i = \int T(x) dx = \int -4x dx$$

$$M_i = -2x^2 + C_2$$

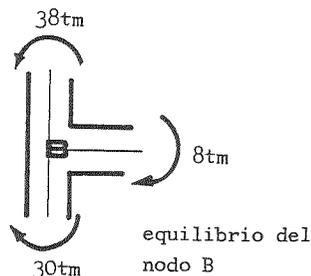
dove la costante iniziale C_2 è nulla non esistendo momento in H . Si può quindi tracciare il diagramma notando che la tangente alla curva in H è orizzontale, come si deduce constatando che la derivata prima si annulla in tale punto. Nel punto C c'è quindi un momento pari a -18 tm che, ovviamente, va considerato anche per il diagramma su CA . Su tale tratto si passa da -18 tm a $-(18 + 10 \cdot 2) = -38$ tm in B . Nel punto B si ha però un momento di -8 tm trasmesso dal tratto BL ($4 \text{ t} \cdot 2 \text{ m}$), momento che, avendo verso contrario, va tolto dalle 38 tm. Nel punto immediatamente successivo a B si ha perciò $-38 + 8 = -30$ tm. Il diagramma prosegue, dopo la discontinuità, con la stessa inclinazione per la costanza della derivata prima (T) fino ad arrivare a un momento di -60 tm equilibrato da M_a .



VERIFICA

Se il diagramma dei momenti flettenti è corretto, un punto qualsiasi della struttura deve essere in equilibrio rispetto alle rotazioni.

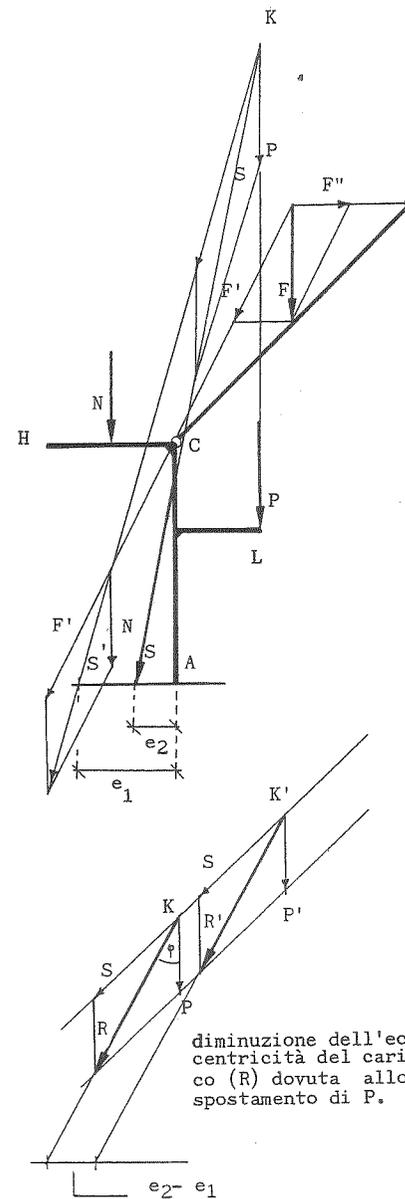
Verifichiamo ad esempio il punto B d'incastro delle due parti di trave CA e BL . Dal diagramma si deduce che il tratto BL trasmette in B una rotazione destrorsa di momento pari a 8 tm, mentre BC trasmette in B una



rotazione levogira di momento pari a 38 tm. Il momento risultante dalla azione di queste due rotazioni è $38 - 8 = 30$ tm come dimostra il diagramma. Questo momento residuo è equilibrato dalla rotazione generata da X_a di momento $X_a \cdot 3 = 30$ tm. Tale punto è quindi in equilibrio.

CONSIDERAZIONI PROGETTUALI

Lo studio della distribuzione dei carichi in relazione alle reazioni vincolari permette di ottenere utili informazioni riguardanti l'architettura dell'edificio. E' chiaro infatti che, in relazione con altre esigenze di varia natura, l'impostazione del progetto va fatta tenendo presente che in una struttura in cui probabilmente verranno usati componenti prefabbricati, è preferibile avere sforzi normali e di taglio anziché momenti flettenti, specie agli incastri. Ora il momento all'incastro A dipende dalla direzione della risultante delle forze agenti sulla struttura. Come si vede nella costruzione in figura infatti, scomposta la forza F , dovuta al carico ripartito su CD , nei componenti F' e F'' , il componente F'' viene equilibrato dall'azione mutua del resto della struttura, mentre F' va composto con il carico N agente su HC dando il risultante S' . Se non ci fosse il carico P , questa sarebbe la direzione del risultante di tutte le forze agenti sulla struttura, risultante che, dovendo essere equilibrato dall'incastro, deve essere trasportato in A , dando un momento di trasporto proporzionale all'eccentricità del risultante e_1 . Il carico in L , cioè P , è stato posto proprio perché, componendosi in K con S , fa diminuire l'eccentricità della risultante da e_1 ad e_2 , diminuendo quindi il momento d'incastro. Qualora le esigenze statiche coincidessero con altre esigenze da tenere presenti in sede di progetto, si potrebbe aumentare il carico gravante in L fino ad ottenere un'eccentricità nulla $e = 0$, oppure aumentare per lo stesso scopo lo sbalzo del-



la mensola BL . Nella seconda figura si sono riportate condizioni grafiche simili a quelle in K . Si vede chiaramente che l'angolo φ di inclinazione della risultante R diminuisce (facendo diminuire l'eccentricità del carico), se si aumenta P . Tale eccentricità diminuisce anche se aumentiamo il braccio BL della mensola spostando P in P' (da K a K') e quindi il risultante da R ad R' .

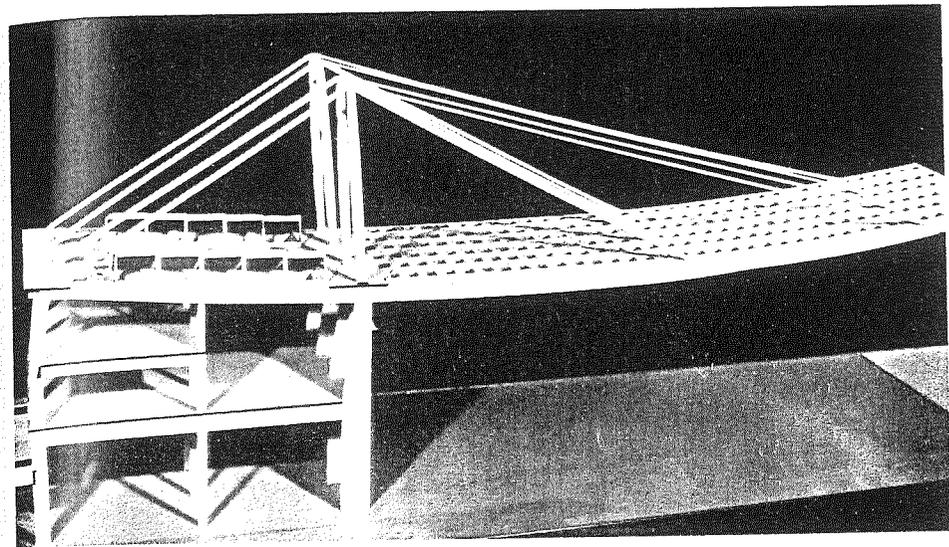


Fig. 1

Fig. 1 - Modello delle aviorimesse dell'aeroporto di Fiumicino (R. Morandi).

Fig. 2 - (pagina seguente) - Le aviorimesse in costruzione.

Fig. 3 - Sezione parziale delle aviorimesse.
(da « Industria italiana del Cemento »)

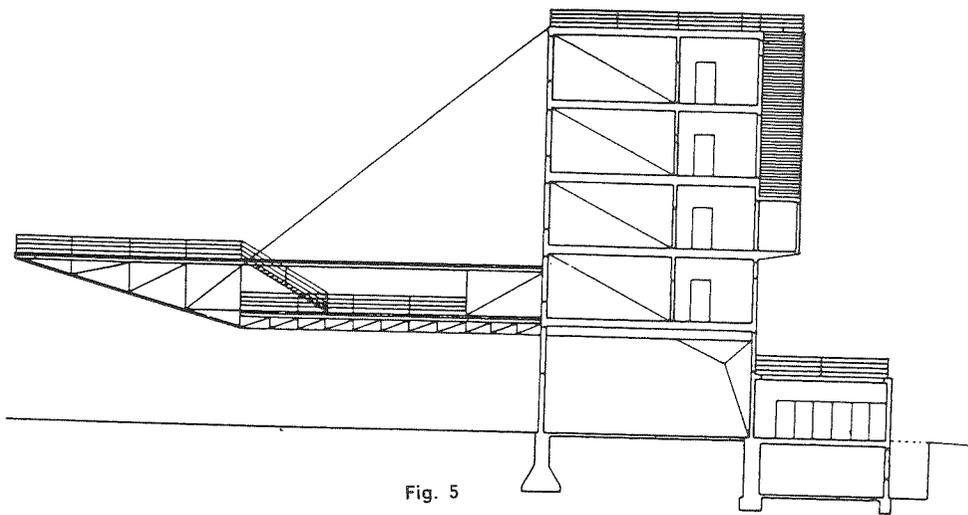


Fig. 5

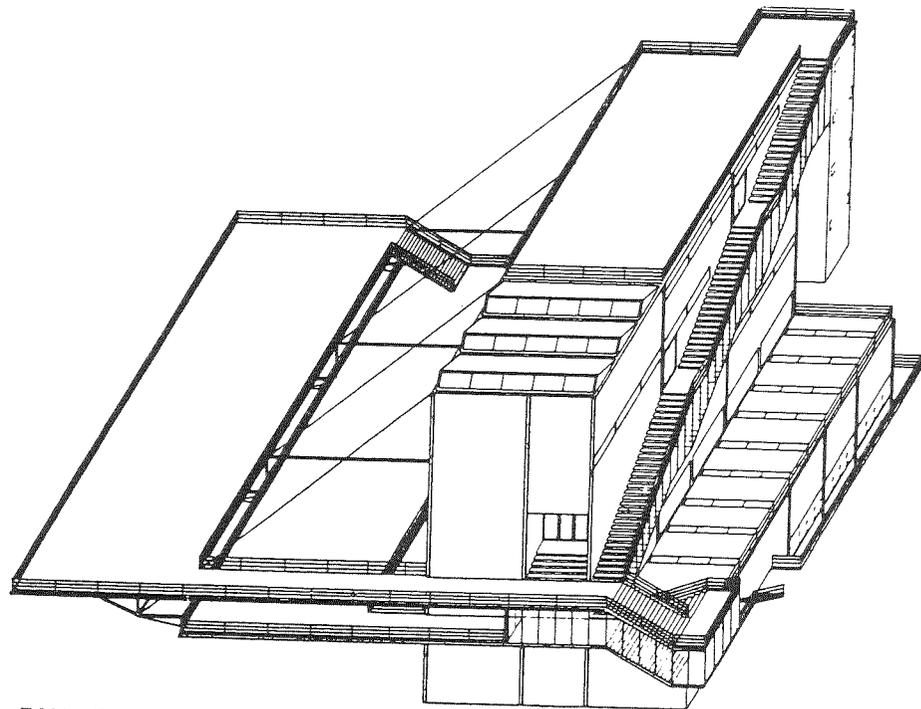
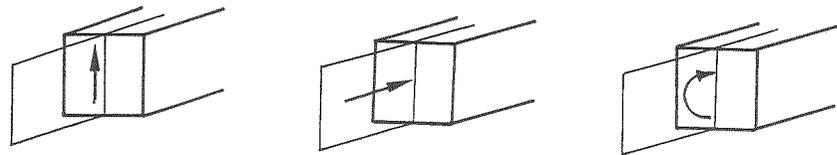


Fig. 6

DIMENSIONAMENTO DELLE SEZIONI

Ogni sezione di trave è sottoposta, a meno che le forze esterne non siano nulle, a delle sollecitazioni cui il materiale impiegato deve essere in grado di reagire. Il problema del dimensionamento della sezione è appunto quello di stabilire una condizione di resistenza ottimale alle sollecitazioni agenti sulla trave, in modo che le sollecitazioni agenti su ogni sezione non facciano superare al materiale le massime tensioni ammissibili. In genere si assume come tensione ammissibile σ_0 una tensione molto lontana dal limite di snervamento. Il coefficiente di sicurezza aumenta quanto maggiore è il rapporto tra il σ di snervamento e il σ_0 assunto. Nel dimensionamento di una sezione dunque bisogna tenere presenti tutte le tensioni agenti sulla sezione. Esse sono:

NEL PIANO



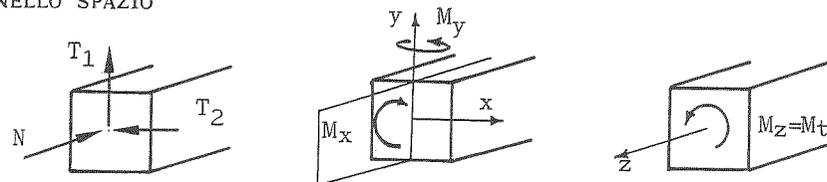
- 1) tensioni tangenziali τ 2) tensioni normali σ 3) tensioni normali σ
 da uno sforzo di taglio: prodotte da uno sforzo di compressione (o trazione): prodotte da un momento flettente:

$$\tau = \frac{TS_i}{Jb_i}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\sigma = \frac{My}{J}$$

NELLO SPAZIO



Una forza applicata nel baricentro della sezione, se non giace sul piano di simmetria delle sezioni, ha 3 componenti: uno sforzo normale N e due componenti dello sforzo di taglio T_1 e T_2 .

Nello spazio vi possono essere 3 rotazioni: intorno ad x , y e intorno ad z della trave. Le rotazioni intorno ad x e ad y corrispondono alle 2 flessioni rette in cui è scomponibile una flessione deviata.

Alla rotazione intorno all'asse z (asse della trave), corrisponde il momento torcente che produce tensioni tangenziali τ .

Le tensioni dovute a queste sollecitazioni sono allora:

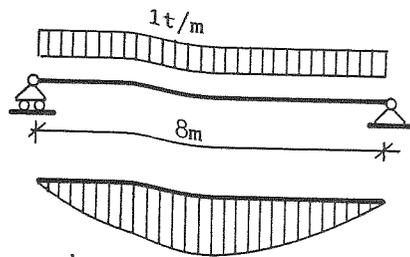
$$\begin{cases} T_1 \rightarrow \tau_1 \\ T_2 \rightarrow \tau_2 \\ M_1 \rightarrow \tau_3 \end{cases} \begin{cases} N \rightarrow \sigma_1 \\ M_x \rightarrow \sigma_2 \\ M_y \rightarrow \sigma_3 \end{cases} \begin{array}{l} \text{vi sono cioè nello spazio} \\ \text{tre tensioni tangen-} \\ \text{ziali dovute al taglio e al} \\ \text{momento torcente e} \\ \text{tre tensioni normali dovute} \\ \text{alla flessione de-} \\ \text{viata e allo sforzo normale.} \end{array}$$

Occorre quindi distinguere, nel dimensionamento di una sezione, se le sollecitazioni agiscono secondo il piano di simmetria della trave (nel qual caso si devono tenere presenti tre sollecitazioni) oppure se le sollecitazioni agiscono secondo altri piani comunque orientati (e si hanno allora sei sollecitazioni). Una volta stabilita questa distinzione, se la trave da dimensionare dovrà essere di sezione costante si progetta la sezione in modo che possa resistere alle sollecitazioni massime, stabilite mediante i diagrammi. Nel caso di sollecitazioni di N ed M_y , si assume, come si vedrà meglio nelle applicazioni, il σ_0 di sicurezza diminuito delle tensioni σ dovute ad N e si progetta la sezione al solo M_y . Nel caso di T ed M_y , in genere si dimensiona la sezione al solo M_y , essendo il valore di T (nei casi ordinari) meno rilevante.

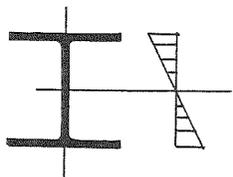
Esercizio 30

Dimensionare la sezione di una trave caricata con un carico ripartito $p = 1 \text{ t/m}$, e avente una luce di 8 m, nel caso in cui si usino travi in ferro e in legno.

Si nota subito che le sollecitazioni giacciono sul piano di simmetria e che lo sforzo normale è assente. Essendo, in travi caricate in questo modo, molto piccolo lo sforzo di taglio, il dimensionamento va fatto tenendo presente il solo M_y .



TRAVE IN FERRO



Al variare della distanza y dall'asse neutro di un elementino di una generica sezione di trave, le tensioni variano con la legge lineare $\sigma = \frac{M y}{J_x}$

dove M è il momento flettente nella sezione considerata. Se vogliamo trovare il punto più sollecitato della trave, dobbiamo cercare la sezione in cui è massimo il momento flettente e di questa sezione dobbiamo considerare il punto più distante dall'asse neutro. Il momento flettente massimo si ha in mezzera dove vale:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} = 8 \cdot 10^5 \text{ kg cm.}$$

per progettare la sezione bisogna imporre che $\sigma_0 \geq \sigma_{max}$:

$$\sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{J_x} = \frac{M}{W_x} \text{ ed avendo (per l'acciaio Aq 42) (1) } \sigma_0 = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{si determina il modulo di resistenza } \frac{J_x}{Y_{max}} = W_x = \frac{800.000 \text{ kg cm}}{1.400 \text{ kg/cm}^2} = 572 \text{ cm}^3$$

Volendo usare ad esempio dei profilati ad ala larga (profilati aventi l'altezza dell'anima uguale alla larghezza delle ali), si cerca sul manuale un modulo di rigidezza che si avvicini a quello desiderato ($W_x = 572 \text{ cm}^3$). Sul manuale si trovano due valori vicini a quello cercato: il normal profilato NP30 che ha un $W_x = 632 \text{ cm}^3$ e NP28 con $W_x = 541 \text{ cm}^3$. Vogliamo verificare ora se entrambi i profilati vanno ugualmente bene allo scopo. Per fare questo si deve sostituire nella

espressione $\sigma = \frac{W}{M}$ i moduli di rigidezza relativi ai valori trovati e vedere quanto le sezioni sono sollecitate. In particolare interessa sapere se usando i profilati trovati si hanno delle σ maggiori o minori di quelle ammissibili ($\sigma_0 = 1400 \text{ kg/cm}^2$).

$$\text{NP 28 } \sigma = \frac{8 \cdot 10^5}{541} = 1470 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_0 \text{ (non accettabile)}$$

$$\text{NP 30 } \sigma = \frac{8 \cdot 10^5}{652} = 1220 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0 \text{ (accettabile)}$$

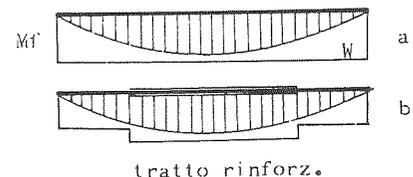
Il profilato da usare sarà quindi lo NP 30. Tuttavia per le grandi luci si possono usare delle travi a momento d'inerzia variabile. La variazione di J_x si ottiene aggiungendo delle piattabande saldate (o bullonate) nel tratto di trave più sollecitato. Se si disegna, oltre il diagramma dei M_y , anche il diagramma dei momenti resistenti dato dal prodotto $\sigma \cdot W$, si nota che per una trave a sezione continua il diagramma di $\sigma \cdot W$ è rettilineo, mentre per le travi a inerzia variabile (fig. b), tale diagramma presenta una discontinuità in corrispondenza del rinforzo, con evidente economia di materiale.

TRAVE IN LEGNO

Il problema del dimensionamento di una sezione in legno è, nella pratica, leggermente diverso da quello del dimensionamento di un profilato. Mentre infatti per un profilato bisogna ricercare W e trovare sul

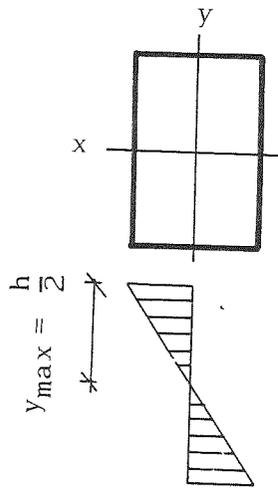
(1) La sigla del tipo di acciaio (Aq 42) sta ad indicare che tale qualità di acciaio ha un limite di snervamento σ_n pari a 42 kg/mm^2 , e poiché si assume in genere $\sigma_0 = \frac{\sigma_n}{3}$ si ha:

$$\sigma_0 = \frac{42}{3} \text{ kg/mm}^2 = 1.400 \text{ kg/cm}^2$$



manuale quale dei tipi di profilati prodotti si avvicina maggiormente al modulo di resistenza richiesto, per il legno bisogna determinare le dimensioni (b ed h nel caso di sez. rettangolare). Fissiamo un rapporto tra base e altezza: $b = \frac{5}{7} h$. (Come σ_0 di sicurezza si assume in genere per il legno 80 kg/cm^2 . Facendo lavorare il legno in tali condizioni infatti, questo materiale può considerarsi isotropo).

Poiché il punto più distante dall'asse neutro è $\frac{h}{2}$ si può scrivere:



$W_x = \frac{J_x}{Y_{max}}$ ed essendo per sezione rettangolare:

$J_x = \frac{bh^3}{12}$ si ha:

$W_x = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$ ed avendo fissato $b = \frac{5}{7} h$ si ha:

$W_x = \frac{5h \cdot h^2}{7 \cdot 6} = \frac{5h^3}{42}$ che è il modulo di resistenza in funzione di h .

Molto importante è ricordare il significato fisico dell'espressione che si usa, una volta ottenuto W_x , per dimensionare la sezione. Nella espressione $\sigma \cdot W = M_f$ infatti il secondo membro è la causa della sollecitazione, mentre $\sigma \cdot W$ è l'effetto, cioè la reazione che le forze molecolari esercitano per equilibrare la sollecitazione del momento flettente. Si produce cioè nel materiale una tensione σ che tende, insieme alle caratteristiche geometriche della sezione (la cui attitudine a resistere alla sollecitazione è espressa dal modulo di resistenza W) ad equilibrare le sollecitazioni in atto. Poiché, fissando $W_x = \frac{5h^3}{42}$ abbiamo fissato la forma della sezione ma non le dimensioni, nell'espressione $\sigma W = M_f$, W deve avere dimensioni tali che σ rimanga entro i limiti di sicurezza, e cioè:

$$\sigma \cdot W_x = M_f, \text{ da cui } W_x = \frac{M_f}{\sigma_0}; \text{ e cioè: } W_x = \frac{5h^3}{42} = \frac{8 \cdot 10^5}{80}$$

$$\text{da cui } h^3 = \frac{42 \cdot 8 \cdot 10^5}{5 \cdot 80}; h = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 10^4}{5}} = 44$$

ed essendo $b = \frac{5}{7} h$ si ha $b = \frac{5 \cdot 44}{7} = 31$; quindi 44 e 31 cm. sono le dimensioni ottimali della sezione. Tuttavia, cercando sul manuale, si

riscontra che questo tipo di sezione non viene prodotto. Le sezioni più simili sono 40×32 e 45×32 . Verificandole entrambe si ha:

$$\text{sez. } 45 \times 32 \quad W_x = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{64.000}{6} = 10.700 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{10^5 \cdot 8}{107 \cdot 10^2} = 75 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0 \text{ (sez. accettabile)}$$

$$\text{sez. } 40 \times 32 \quad W_x = \frac{bh^3}{6} = \frac{32 \cdot 1600}{6} = 8.560 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{M_f}{W_x} = \frac{8 \cdot 10^5}{8560} = 94 \text{ kg/cm}^2 \text{ (sez. non accettabile)}$$

la sezione da adottare sarà senz'altro la 45×32 .

Esercizio 31

Trovare la posizione dell'asse neutro e il diagramma delle tensioni in una trave IPE 500 caricata con un carico N di 30 t in C di coordinate $C(0,25)$ rispetto agli assi principali d'inerzia (v. figura).

$$h = 500 \text{ mm.}$$

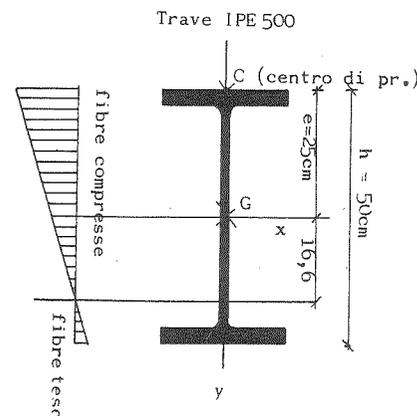
$$\text{Area sez.} = 116 \text{ cm}^2$$

$$J_x = 48200 \text{ cm}^4$$

Il carico, eccentrico di 25 cm rispetto al baricentro G produce una sollecitazione di sforzo normale e una di flessione. Trasportata infatti la forza N nel baricentro si ha uno sforzo normale $N_e = 30 \text{ t} \cdot 25 \text{ cm}$ il cui piano di sollecitazione ha per traccia la y . La flessione è quindi retta. Nel pilastro presso inflesso ci saranno delle parti tese (σ positivo) e delle parti compresse (σ negativo) divise da un asse neutro (intorno a cui ruotano le sezioni) in cui si ha $\sigma = 0$.

Note le coordinate di $C(x_0, y_0)$, si sa che, nel caso generico di sollecitazione deviata (di cui la flessione retta è un caso particolare, le sollecitazioni sono date da uno sforzo normale N/A , e da due momenti flettenti secondo gli assi x e y ,

$$\frac{N y_0}{J_x} y, \quad \frac{N x_0}{J_y} x$$



perciò in totale la sollecitazione produce una

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_0y}{J_x} + \frac{Nx_0x}{J_y}$$

da cui ponendo $J_x = \rho_x^2 A$ si ha:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{A} \cdot \frac{y_0y}{\rho_x^2} + \frac{N}{A} \cdot \frac{x_0x}{\rho_y^2} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_0y}{\rho_x^2} + \frac{x_0x}{\rho_y^2} \right)$$

Il luogo dei punti in cui $\sigma = 0$ è cioè una retta di equazione

$$\frac{y_0y}{\rho_x^2} + \frac{x_0x}{\rho_y^2} = -1$$

e introducendo le coordinate di $C(0,25)$ $\frac{25y}{\rho_x^2} = -1$ (a)

e rendendo l'equaz. dell'asse neutro in forma esplicita $y = -\frac{\rho_x^2}{25}$ (parallela a y). Determinando poi ρ_x^2 attraverso i dati forniti dai manuali si ha:

$$\rho_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{48200 \text{ cm}^4}{116 \text{ cm}^2} = 416 \text{ cm}^2 \text{ per cui la (a) diventa}$$

$$y = -\frac{416 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}}$$

e cioè $y = 16,6 \text{ cm}$ che è l'equazione dell'asse neutro, dove $\sigma = 0$. Poiché il diagramma delle σ ha andamento lineare, per determinarlo basta conoscerne due punti di cui uno noto ($\sigma = 0$ nell'asse neutro). L'altro punto del diagramma si ottiene dalla constatazione che si ha in corrispondenza di G :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30.000 \text{ kg}}{116 \text{ cm}^2} = 271 \text{ kg/cm}^2$$

Costruendo il diagramma si ha:

$$\sigma_{\max} = 733,12 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_s \text{ (carico di sicurezza)}$$

Esercizio 32

Dimensionare la sezione di un pilastro non snello (1) presso inflesso, sollecitato in punta da un carico verticale di 6 t e uno orizzontale di 3t.

(1) Per i pilastri snelli, come si vedrà in un esercizio successivo, bisogna introdurre nel calcolo un coefficiente ω (maggiore di uno) per cui viene moltiplicato N . Tale coefficiente è in funzione della lunghezza del pilastro, del tipo di vincolo e del giratore minimo della sezione.

Si cerca dapprima, mediante i diagrammi, la sezione più sollecitata. Essa è la sezione all'incastro, in cui si ha $M_f = 9 \text{ tm}$, $T = -3$ e $N = 6$. Trascurando il taglio, tale sezione è compressa da N ed inflessa da M_f . Si calcola ora l'eccentricità:

$$e = \frac{M_f}{N} = 1,5 \text{ m}$$

che è molto forte e quindi la sollecitazione di flessione è più importante di quella di compressione. La tensione massima totale è data da

$$\sigma = \frac{N}{A} \omega \pm \frac{M}{W}$$

dove ω è un coefficiente dovuto al carico di punta che per ora si trascura ($\omega = 1$). Per rapidità di calcolo si stima il contributo dovuto al carico e si assume il σ di sicurezza a 1300 kg/cm^2 anziché 1400 kg/cm^2 , avendo considerato che il non tener conto di $\sigma = \frac{N}{A}$ comporta una di-

minuzione di σ_s di 100 kg/cm^2 . Si dimensiona ora il profilato con il solo momento flettente, tenendo naturalmente presente che verrà disposto in modo da reagire alla sollecitazione con l'asse d'inerzia più elevata.

$$W_x = \frac{M}{\sigma_s - 100 \text{ kg/cm}^2}$$

$$W_x = \frac{9 \cdot 10^5}{1300} = 700 \text{ cm}^3$$

Dalle tabelle si ha per NP 32, $W_x = 781$.

Verificando questa sezione si ha:

$$\text{NP 32 (} A = 77 \text{ cm}^2, W_x = 781 \text{ cm}^3)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_f}{W} = \frac{6 \cdot 10^3}{77} + \frac{9 \cdot 10^5}{781} = 78 + 1150 = 1228 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_s$$

(sezione accettabile).

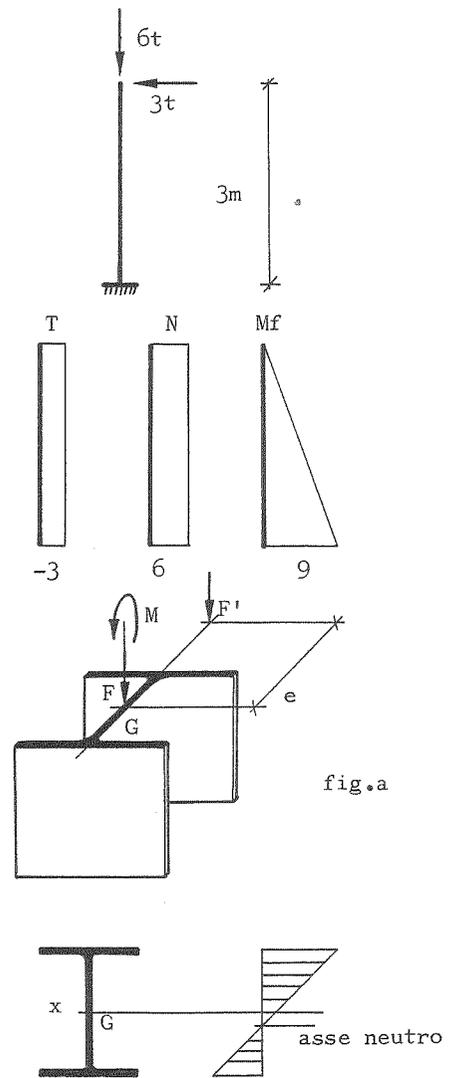
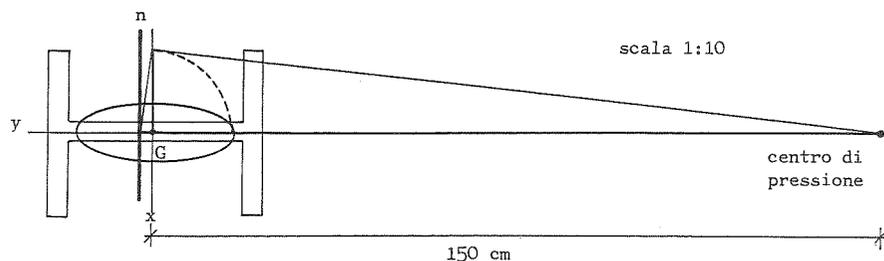


fig.a

Come si vede si è verificata anche la stima intuitiva del contributo dovuto a $\frac{N}{A}$, infatti nella verifica si è tenuta presente sia la sollecitazione dovuta a M_I che ad N .

Le sollecitazioni sulla sezione all'incastro possono essere considerate come prodotte da una pressione eccentrica. Infatti (figura a), se spostiamo la forza sul piano di sollecitazione fino ad una distanza $e = \frac{M}{F}$ dal baricentro, chiamata questa forza F' , si ha che i due sistemi (F') e (F, M) sono equivalenti (come si può constatare riportando F' in G e aggiungendo una coppia di trasporto $F' \cdot e = M$). Ricondotto così il problema a quello della pressione eccentrica, si può constatare come, all'aumentare dell'eccentricità (e), aumenti l'influenza dello sforzo di flessione rispetto a quello di compressione. Al limite, quando il centro di pressione è molto lontano, lo si considera all'infinito e si trascura lo sforzo normale N . Infatti all'aumentare di e l'asse neutro si avvicina al baricentro risultando, quando e è molto simile a quella di flessione semplice, in cui l'asse neutro passa appunto per il baricentro. Nel caso in esame σ dovuto ad N è molto piccolo nei confronti del σ dovuto a M_I (78 kg/cm^2 contro 1150 kg/cm^2). Infatti, facendo la costruzione grafica dell'asse neutro (fig. b, si ricordi che l'asse neutro è l'antipolare del centro di pressione) si vede che n è molto vicino al baricentro G .



Esercizio 33

Trovare le reazioni e i diagrammi di sollecitazione della struttura in figura e dimensionare la trave tenso inflessa AB .

1) REAZIONI VINCOLARI E AZIONI MUTUE

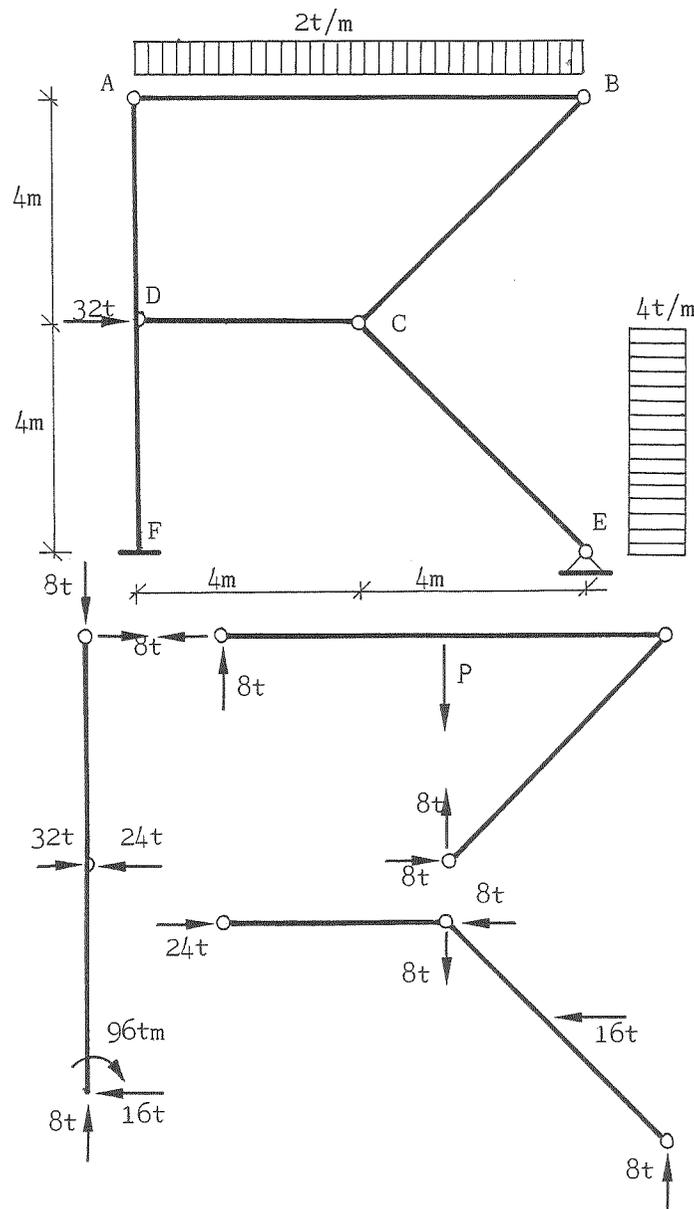
La struttura può essere scomposta negli archi a tre cerniere ABC e DCE , e nella mensola AF .

La mensola AF è la parte portante, gli archi a tre cerniere risultano invece portati.

Le reazioni vincolari e le azioni mutue risultano come nello schema in basso.

Le reazioni in A dell'arco a tre cerniere ABC si riportano, con segno contrario, come azioni sulla mensola, e lo stesso avviene per le reazioni in D dell'arco DCE .

Il tratto CB , essendo caricato soltanto sui nodi, funziona come un pendolo e quindi le componenti della reazione in C (Y_c e X_c) avranno uguale



valore, mentre in D esisterà solo la componente orizzontale X_d , essendo anche DC un pendolo.

2) DIAGRAMMI DI SOLLECITAZIONE

SFORZO NORMALE

Orientando l'asse delle x come in figura la legge di variazione dello sforzo in EC risulta:

$$N_x = -4\sqrt{2} - 2x\sqrt{2}$$

e per $x = 4$ si ha il valore massimo dello sforzo normale in EC :

$$N_c = -12\sqrt{2}$$

TAGLIO

Orientando, come in figura, lo asse x con origine in A e verso positivo a destra e l'asse x' con origine in E e verso positivo a sinistra, le leggi di variazione risultano:

in EC

$$T_{x'} = (2x' - 4)\sqrt{2}$$

$$T_c = 4\sqrt{2}$$

e in AB

$$T_x = 8 - 2x$$

MOMENTO FLETTENTE

Con gli stessi assi di riferimento del diagramma di taglio si hanno le seguenti leggi di variazione:

in EC

$$M_{x'} = 8x' - 2x'^2$$

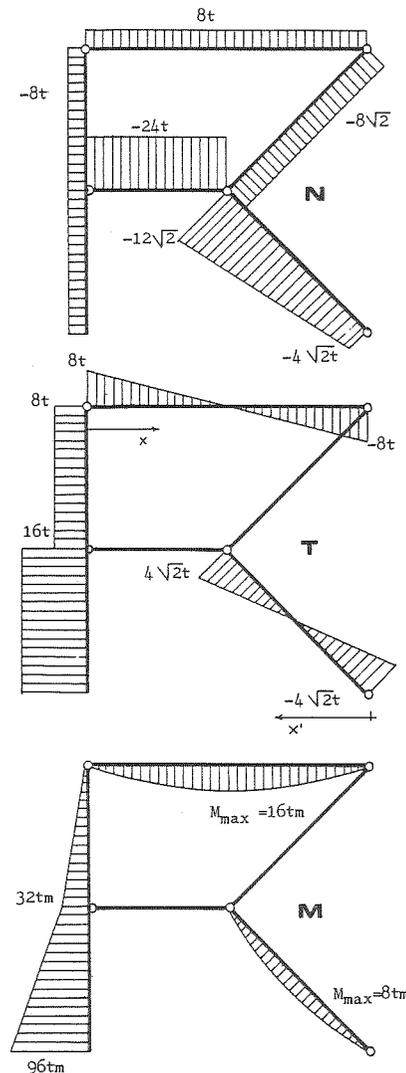
$$M_{max} = 8 \text{ tm}$$

in AB

$$M_x = 8x - x^2$$

$$M_{max} = 16 \text{ tm}$$

Nei pendoli BC e CD non si ha taglio né momento flettente perché la reazione ha direzione sempre incidente il baricentro della sezione e normale ad esse.



3) DIMENSIONAMENTO DELLA TRAVE AB

L'asta è sollecitata a trazione, flessione e taglio, come risulta dai diagrammi. Il dimensionamento verrà effettuato dove è massimo il momento flettente e cioè nella mezzeria della trave, dove è nullo il taglio. Le tensioni che si generano in tale sezione sono quindi solo normali, essendo assenti quelle tangenziali. Non esiste una formula di progettazione diretta nel caso di tensoflessione, ma solo di verifica:

$$\sigma \leq \sigma_0 \quad A) \quad \text{da cui} \quad \frac{N}{A} + \frac{M}{W_x} \leq \sigma_0 \quad B)$$

Infatti l'equazione che si otterrebbe facendo lavorare il materiale alla tensione di sicurezza σ_0 è un'equazione nelle due incognite A e W_x .

Bisogna allora procedere per tentativi. Troviamo intanto l'eccentricità della forza normale N nel caso che alla tensoflessione si sostituisca un caso equivalente di trazione eccentrica. Si ha:

$$e = \frac{M}{N} \quad e = \frac{16}{8} \quad e = 2 \text{ m}$$

L'eccentricità è molto forte e questo significa che, essendo l'asse neutro molto vicino al baricentro della sezione (v. Belluzzi, vol. I, p. 449), è prevalente l'effetto di flessione su quello di trazione.

Possiamo così stimare che la tensione dovuta a sforzo normale è molto piccola rispetto a quella dovuta a momento flettente (ad esempio, come valore di tentativo, $N/A = 100 \text{ kg/cm}^2$) e dimensionare la trave a momento flettente supponendo che il materiale debba lavorare (assumendo una tensione di sicurezza di 1400 kg/cm^2) a 1300 kg/cm^2 , in quanto 100 kg/cm^2 verranno aggiunti dallo sforzo normale.

$$W_x = \frac{M}{1300} \quad W_x = \frac{1.600.000}{1300} \quad W_x = 1230 \text{ cm}^3$$

Sul manuale troviamo che il profilato a doppio T che più si avvicina a questo valore del modulo di resistenza è l'IP 380 (UNI 725-726), con $W_x = 1262$. Verifichiamo che le tensioni massime non superino quelle ammissibili. Utilizzando l'espressione B) abbiamo:

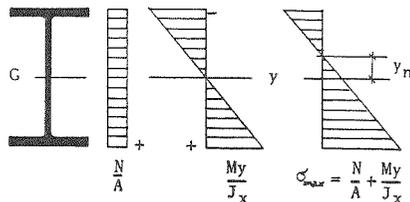
$$\sigma_{max} = \frac{8000}{107} + \frac{1.600.000}{1262}$$

$$\sigma_{max} = 1335 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{max} \leq \sigma_0$$

Il profilato è quindi accettabile. Se verificiamo il profilato immediatamente più piccolo (IP 360), troviamo che la tensione massima è 1560 kg/cm^2 e quindi non è accettabile. Il diagramma delle tensioni, dovuto alla sovrapposizione della tensione dovuta a N a quella dovuta a M , è rappresentato in figura. L'asse neutro dista dal baricentro:

$$y_n = - \frac{\rho_x^2}{e}$$

$$y_n = \frac{200}{260} \quad y_n = 7,7 \text{ mm}$$



Parte seconda

STATI TENSIONALI SU PIANI INCLINATI

Si è visto, attraverso lo studio dei sistemi isostatici, che su ogni sezione della struttura possono arrivare sollecitazioni di sforzo normale, taglio, momento flettente e momento torcente, cui la sezione, perché sia in equilibrio, deve reagire. Tali sollecitazioni vengono infatti equilibrate, nella sezione, dallo sviluppo di tensioni interne che possono essere considerate forze ripartite su una superficie. La loro determinazione viene effettuata proprio presupponendo una condizione di equilibrio tra forze esterne (le sollecitazioni che arrivano sulla sezione), e forze interne (quelle sviluppate dalle tensioni). Si arriva così a stabilire il valore delle tensioni σ ortogonali dovute a momento flettente e sforzo normale (1) e di tensioni tangenziali τ dovute a taglio e momento torcente (2). Tuttavia se ci si limitasse a questa schematizzazione del problema, i risultati potrebbero essere pericolosi. Infatti, poiché si assume per comodità (3) come criterio di resistenza del materiale la tensione massima ammissibile (al di sotto della quale il materiale lavora in condizioni di sicurezza), limitarsi a controllare che la tensione massima raggiunta nella sezione sia minore di quella ammissibile, come avviene in fase di dimensionamento, significa presupporre che le tensioni massime si abbiano lungo direzioni ortogonali o tangenti alle sezioni normali, cosa che di fatto si verifica solo in casi eccezionali. Più spesso, se facciamo ruotare una sezione, ci accorgiamo che le tensioni ortogonali e tangenziali variano al variare dell'angolo α che la sezione forma col piano verticale, e che nella rotazione vengono raggiunti valori di σ e τ maggiori di quelli iniziali. In particolare ci interesseremo di quei piani dove risultano massime le σ (piani principali) e massime le τ (piani di massimo scorrimento), dato che su questi piani (perché il dimensionamento sia accettabile) le tensioni debbono essere minori o uguali a quelle ammissibili. Per convincersi di questo fatto basta un semplice esempio. Consideriamo una trave

(1) V. O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, I, § 179-183.

(2) *Ibidem*, § 153 e 166.

(3) A rigore sarebbe più corretto assumere le deformazioni (o. c. § 122).

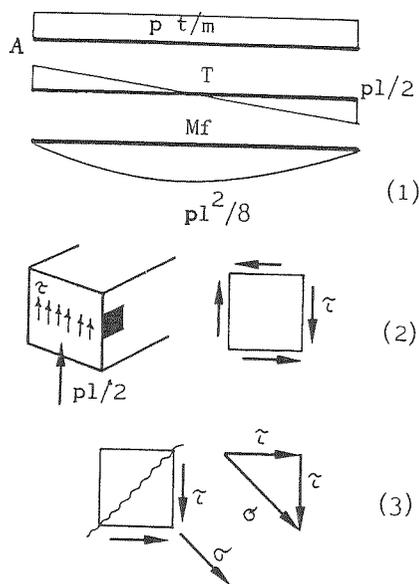
appoggiata o incernierata con carico uniformemente ripartito (fig. 1). I diagrammi mostrano che nella sezione iniziale A esiste solo una sollecitazione di taglio in quanto sono assenti sforzo normale e momento flettente. In pratica sulla sezione normale in A esisterà solo una forza pari a $pl/2$ tangente alla sezione, che produrrà unicamente tensioni τ . Prendiamo allora un cubetto unitario all'interno del concio iniziale della trave (fig. 2). Ci saranno tensioni τ su una faccia, tensioni uguali e contrarie sulla faccia opposta, e ci saranno infine le τ reciproche sulle facce orizzontali. Moltiplicando queste tensioni per l'area (unitaria) su cui insistono si ottengono delle forze che possono essere composte come in fig. 3. Si vede immediatamente dalla figura che su piani inclinati a 45° si svilupperanno tensioni tali da poter compromettere il funzionamento della struttura. Ecco allora che in tale sezione non solo va verificata la condizione $\tau_{max} \leq \tau_o$ ma anche $\sigma_{max} \leq \sigma_o$ dove τ_{max} si troverà sul piano verticale e σ_{max} su un piano inclinato di 45° col precedente e varrà $\sigma_{max} = \tau_{max} \sqrt{2}$.

Il ragionamento fatto chiarisce come sia necessaria una verifica più approfondita dello stato di tensione all'interno del materiale: in questo caso abbiamo constatato come esistano tensioni normali in una sezione in cui avremmo supposto solo tensioni tangenziali. Non sempre tuttavia lo studio dello stato di tensione nell'intorno di un punto è così semplice: a tale scopo viene allora usato il metodo grafico analitico dovuto a Mohr, riassunto nelle pagine che seguono (4).

Cerchio di Mohr

In generale, in una sezione, si hanno diversi tipi di sollecitazioni (M , T , Mt , N), le quali producono stati di tensione in cui compaiono insieme tensioni tangenziali τ e tensioni normali σ .

Supponiamo allora data una struttura soggetta a un sistema di forze arbitrario. Si considera che lo stato di tensione vari con sufficiente lentezza da punto a punto in modo tale che sia sempre possibile scegliere nell'intorno di un punto P un'area sufficientemente piccola da poter considerare lo stato di tensioni relativo omogeneo. Se immaginiamo il punto P attraversato da un fascio di piani, su ognuno



di questi piani lo stato di tensione sarà diverso.

Consideriamo ad esempio lo stato di tensione nell'intorno di un punto schematizzato in fig. 1, relativo ad un'area A sufficientemente piccola presa su un piano parallelo al piano yz (fig. 2).

Al variare dell'angolo α che un piano preso in esame forma con la verticale varierà il rapporto tra σ e τ secondo una legge precisa, e in particolare esisterà un piano su cui è massima la tensione normale, ed un altro su cui essa è minima (e lo stesso accadrà per le tensioni tangenziali).

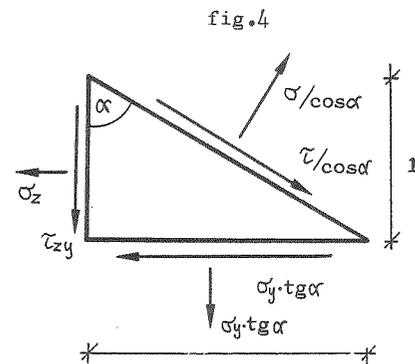
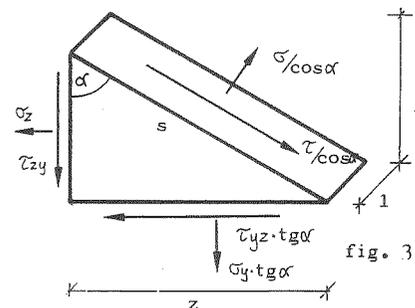
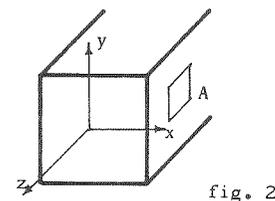
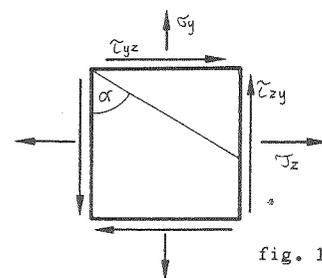
Per studiare allora il rapporto tra σ e τ al variare di α , consideriamo il parallelepipedo in fig. 3 di spigoli 1 , 1 , z ed s . Supponiamo di conoscere σ_z , σ_y , τ_{yz} , τ_{zy} . Al variare di α (e quindi di z), variano le tensioni normali e tangenziali sulla faccia inclinata che debbono assicurare l'equilibrio dell'elemento considerato. E' proprio attraverso l'equilibrio di questo elemento che possiamo conoscere il valore delle tensioni sulla faccia inclinata di un angolo generico α . Graficamente le condizioni di equilibrio sono espresse dal fatto che il poligono funicolare delle forze ottenute dal prodotto delle tensioni per le relative aree sia chiuso. Su questa considerazione si basa il metodo del cerchio di Mohr. L'area della faccia su cui giacciono le tensioni σ_z e τ_{yz} ha una superficie pari a $1 \cdot 1$ e quindi le altre aree saranno:

$$1. z = 1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$1. s = 1/\operatorname{cos} \alpha$$

Moltiplicando le tensioni per queste aree si ottengono le forze agenti, come in fig. 4.

Poiché l'elementino in fig. 4 deve essere in equilibrio, è possibile conoscere il valore delle tensioni



(4) Il Belluzzi dà della teoria del cerchio di Mohr un'esposizione puramente analitica (BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, I, § 179-183).

- a) se da K si conduce la parallela alla giacitura su cui si cercano le tensioni si determina M sulla circonferenza;
 b) se da K si conduce la verticale si determina V . (di coordinate σ_z e τ_{zy});
 c) se da K si conduce l'orizzontale si determina O . (di coordinate σ_y e τ_{yz}).

Costruzione pratica del cerchio di Mohr

Dati: sono note le tensioni sui piani orizzontali e verticali (tensioni ricavabili direttamente dalle sollecitazioni).
 Problema: si vogliono determinare le tensioni su piani inclinati di un generico angolo α con la verticale.

A) Fissato un sistema di riferimento con ordinate τ e ascisse σ , si determina la posizione del centro C che si troverà sull'asse delle ascisse e disterà da \bar{O} :

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$$

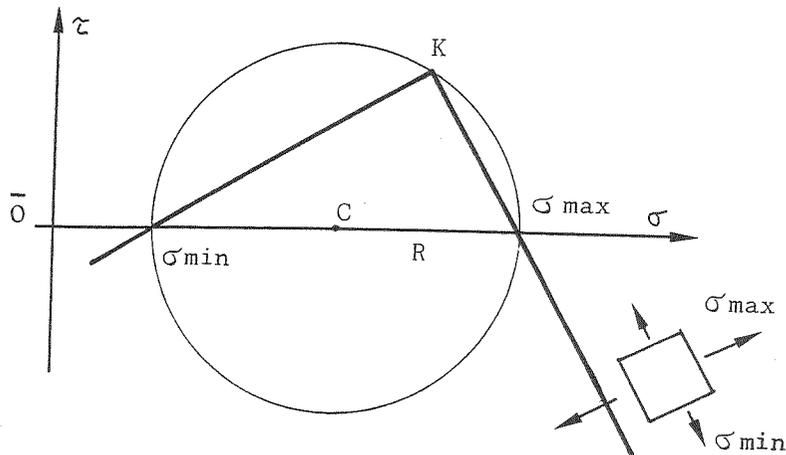
B) Si determina la posizione di V (le cui coordinate sono date dal valore delle tensioni sulle facce verticali) e di O (le cui coordinate sono date dal valore delle tensioni sulle facce orizzontali).

C) Con centro C si costruisce il cerchio di raggio $R = CV = CO$ il cui valore è:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{yz})^2}$$

D) Mandando l'orizzontale per il punto O e la verticale per il punto V si determina all'intersezione il polo K delle giaciture.

E) Mandando per K la parallela ai piani sui quali si vogliono conoscere le tensioni, si determinano i corrispondenti punti M sulla circonferenza le cui coordinate individuano il valore delle tensioni cercate.



Piani principali

Consideriamo, una volta costruito il cerchio di Mohr e determinata la posizione del polo K , le intersezioni del cerchio con l'asse delle σ . Tali punti, poiché il centro del cerchio si trova, per costruzione, sull'asse delle ascisse, saranno i punti in cui si ha maggiore e minore valore delle tensioni normali. Congiungendo questi due punti col polo delle giaciture K si trovano allora le tracce dei piani in cui la tensione normale è massima e minima. Tali piani si dicono *piani principali* e (come si deduce dalle loro coordinate) hanno la caratteristica di non avere tensioni tangenziali. Essendo l'angolo che essi formano alla circonferenza retto, se orientiamo un elementino con le facce parallele a questi due piani, su una faccia avremo la tensione massima, e sull'altra la minima (vedi figura).

Il valore di queste tensioni è:

$$\sigma_{max} = \bar{OC} + R = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{yz})^2}$$

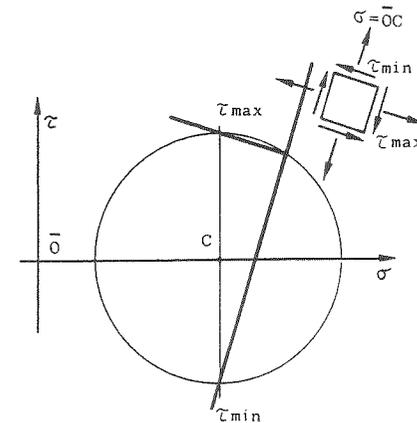
$$\sigma_{min} = \bar{OC} - R = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{yz})^2}$$

Si noti che la σ_{min} può avere valore negativo, come pure la σ_{max} .

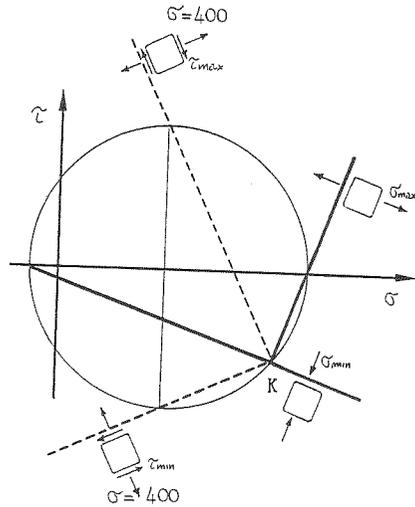
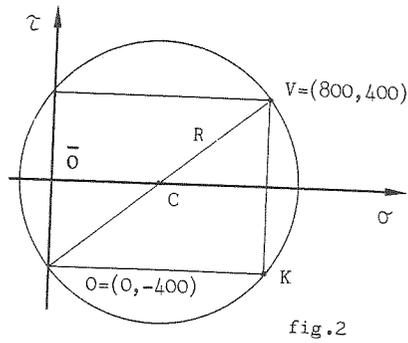
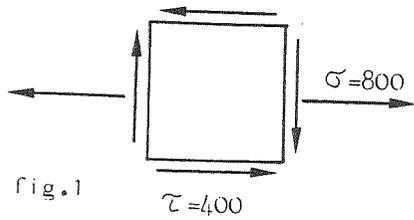
Piani di massimo scorrimento

Come per le tensioni normali, così pure per le tensioni tangenziali esisteranno dei piani sui quali le τ assumono valore massimo. Tali piani, detti di *massimo scorrimento*, si determinano congiungendo il polo K delle giaciture con i punti della circonferenza in cui le ordinate hanno valore maggiore. Come si vede dalla figura accanto tali punti si trovano sulla verticale di C . Si noti che, a differenza dei piani principali su cui non esistevano τ , sui piani di massimo scorrimento possono esistere delle σ . Il valore delle τ su questi piani è uguale alla misura del raggio.

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= R \\ \tau_{min} &= -R \end{aligned}$$



Esercizio 1



Dato un elementino sollecitato da tensioni tangenziali pari a 400 kg/cm² e da tensioni normali sulle facce verticali (come in fig. 1) pari a 800 kg/cm², trovare i piani principali e i piani di massimo scorrimento e determinare il valore delle relative tensioni.

Secondo la regola pratica per la costruzione del cerchio di Mohr, fissato un sistema di riferimento ortogonale σ, τ , si determina la posizione dei punti V ed O . Il punto V ha come coordinate il valore delle tensioni sulle facce verticali (e quindi +800 e +400) mentre il punto O ha come coordinate il valore delle tensioni sulle facce orizzontali (cioè 0 e -400). Unendo il punto O con V si ricaverà il centro C come intersezione del segmento OV con l'asse delle ascisse. La distanza di C dall'origine \bar{O} degli assi sarà $\bar{OC} = 400$ mentre col teorema di Pitagora si ricava il valore del raggio R :

$$R = \sqrt{(400)^2 + (400)^2} = 565$$

Mandando ora la verticale per V fino ad incontrare la circonferenza del cerchio costruito in C e raggio R , ricaviamo il polo delle giaciture K , che è il punto per il quale debbono passare le tracce di tutti i piani sui quali si vogliono determinare le tensioni (fig. 2).

Se ora vogliamo determinare i piani principali (sui quali è nulla la tensione tangenziale e massima la normale), basta considerare che i valori massimi assoluti per le tensioni normali si hanno all'intersezione dell'asse delle ascisse con la circonferenza. Siccome allora le tracce dei piani di massimo scorrimento dovranno passare per queste intersezioni e per il polo K , basta unire tali punti per ottenere le giaciture cercate (fig. 3). I valori delle tensioni su tali piani sono:

$$\sigma_{max} = \bar{OC} + R = 400 + 565 = 965 \text{ kg/cm}^2$$

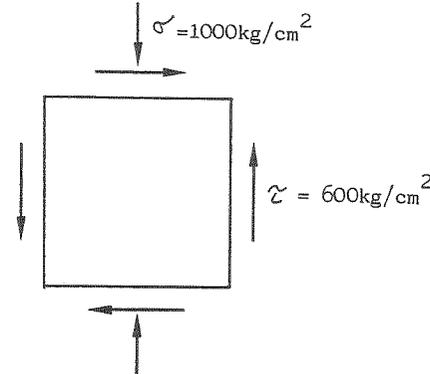
$$\sigma_{min} = \bar{OC} - R = 400 - 565 = -165 \text{ kg/cm}^2$$

I punti in cui si ha il massimo valore delle tensioni tangenziali sono quelli sulla verticale di C : i piani di massimo scorrimento saranno allora quelli tratteggiati in fig. 3 e il valore delle tensioni corrispondenti sarà:

$$\tau_{max} = R = 565 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = \bar{OC} = 400 \text{ kg/cm}^2$$

Esercizio 2



Determinare lo stato di tensione sui piani principali e sui piani di massimo scorrimento per un elementino con le tensioni indicate nella figura sopra.

Il punto V avrà coordinate 0 e -600, mentre il punto O avrà coordinate -1000 e +600. La distanza del centro dall'origine sarà allora $\bar{OC} = -500$ e il raggio sarà:

$$R = \sqrt{(500)^2 + (600)^2} = 780$$

I piani principali sono allora quelli indicati in fig. 2, dove si ha:

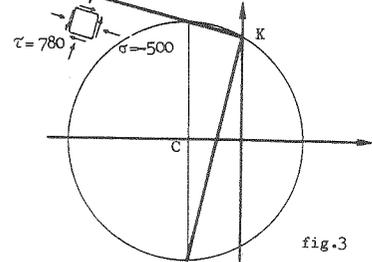
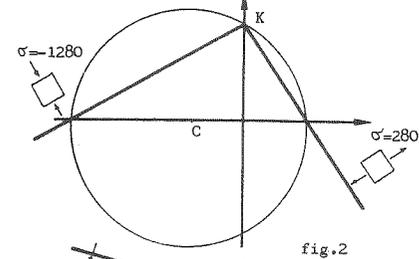
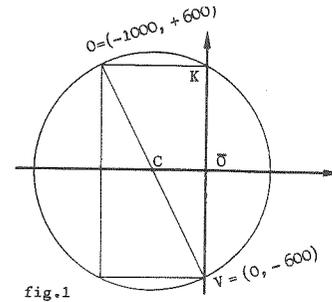
$$\sigma_{max} = R - \bar{OC} = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{min} = -R - \bar{OC} = -1280 \text{ kg/cm}^2$$

I piani di massimo scorrimento sono invece quelli indicati in fig. 3 dove si avranno tensioni massime tangenziali pari al valore del raggio R mentre saranno presenti anche tensioni normali di compressione di valore pari a \bar{OC} :

$$\tau_{max} = R = 780 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = \bar{OC} = -500 \text{ kg/cm}^2$$



Esercizio 3

Progettare la sezione di una mensola con 3 metri di sbalzo e caricata nell'estremo libero con un carico di 4 t, e verificare che le tensioni principali non superino quelle ammissibili.

Le sollecitazioni maggiori si avranno all'incastro, dove il momento flettente vale -12 tm e il taglio -4 t .

Progettando una trave ad inerzia costante si dimensionerà la sezione per tali valori massimi delle sollecitazioni. La sezione si dimensiona per la sollecitazione di momento flettente e si verifica poi che le tensioni dovute sia al momento flettente che al taglio non superino quelle ammissibili. Supponiamo di usare un acciaio i cui limiti di sicurezza siano:

$$\sigma_o = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_o = 800 \text{ kg/cm}^2$$

Si avrà per il dimensionamento:

$$W = \frac{M}{\sigma_o} = \frac{1.200.000 \text{ kg. cm}}{1.200 \text{ kg/cm}^2}$$

Si noti che nel fare questa operazione si riporta il valore delle sollecitazioni nelle unità di misura rispetto alle quali i manuali riportano i dati relativi ai profilati (cm e kg).

Volendo ora usare una trave Differdange, cerchiamo sul manuale un profilato di tale tipo il cui modulo resistente si avvicini a quello voluto. Poiché il manuale fornisce due moduli di resistenza (W_x se si dispongono le ali parallele all'asse delle x e W_y se si usa invece il profilato nell'altro senso), si sceglierà il modulo maggiore W_x , il che significa che il profilato verrà montato col piano di sollecitazione ortogonale alle ali.

Troviamo sul manuale due profilati di modulo simile a quello cercato:

$$\text{IP 24 con } W_x = 974 \text{ cm}^3$$

$$\text{IP 25 con } W_x = 1064 \text{ cm}^3$$

scartando il primo profilato che avrebbe sicuramente tensioni massime superiori a quelle ammissibili, si verifica il secondo per mezzo del cerchio di Mohr. Infatti la verifica con la formula di progetto ($\sigma = M/W$) garantisce solo che su giaciture verticali le tensioni normali non superano quelle ammissibili, ma possono esistere altre giaciture, e per

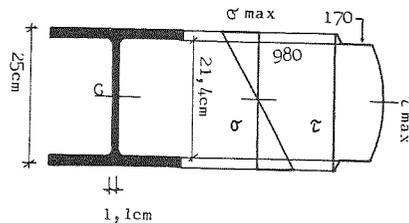
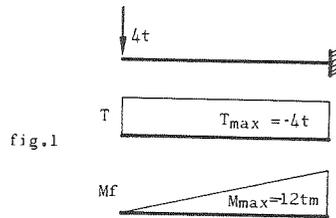


fig. 2

punti della sezione che non siano i lembi estremi, per le quali le tensioni assumono valori pericolosi. Dai diagrammi delle tensioni in fig. 2 si deduce che, per profilati sollecitati a flessione e taglio, i punti maggiormente pericolosi sono quelli di attacco tra ali ed anima: infatti in questi punti si combinano tensioni tangenziali e normali vicine ai valori massimi. Verifichiamo uno solo di questi punti (quello superiore) perché i valori dell'altro, per la simmetria della sezione e dei diagrammi di tensione, saranno gli stessi cambiati di segno. Le dimensioni geometriche della sezione sono riportate in fig. 2. L'area è di 116 cm^2 .

I valori statici del profilato IP 25 sono:

$$W_x = 1064 \text{ cm}^3$$

$$J_x = 13.298 \text{ cm}^4$$

Poiché il punto di attacco tra anima e ala dista dal baricentro della sezione $10,7 \text{ cm}$, nell'intorno di tale punto si avrà una tensione normale:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_x}$$

$$\sigma = \frac{1.200.000}{13.298} : 10,7 = 980 \text{ kg/cm}^2$$

mentre la tensione tangenziali (che si assume uguale a quella massima data la piccola differenza che in ogni caso è a vantaggio della sicurezza) sarà data da:

$$\tau = \frac{T}{b_o H_o} =$$

$$\tau = \frac{4000 \text{ kg}}{23,6 \text{ cm}^2} = 170 \text{ kg/cm}^2$$

Si avrà allora lo stato di tensioni in fig. 3 da cui si può ricavare l'andamento delle tensioni su piani comunque inclinati attraverso la costruzione del cerchio di Mohr.

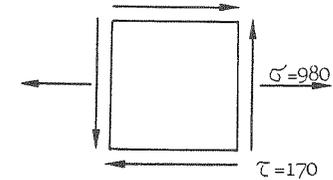


fig. 3

Stato di tensione sui piani di riferimento *

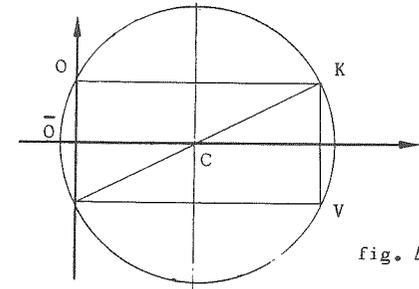


fig. 4

Costruzione del cerchio

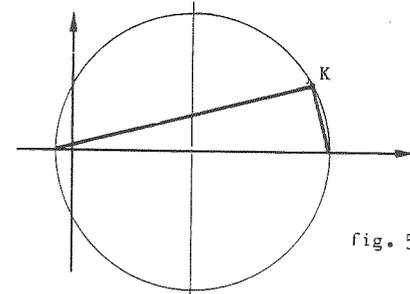


fig. 5

Piani principali

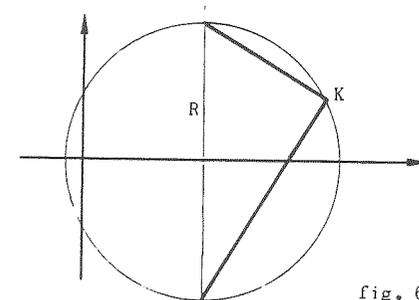


fig. 6

Piani di massimo scorrimento

Le coordinate dei punti fissi saranno:

$$V \equiv (980, -170)$$

$$O \equiv (0, 170)$$

per cui la distanza \overline{OC} del centro dall'origine \overline{O} degli assi è 490.

Il raggio R sarà (teorema di Pitagora):

$$R = \sqrt{(490)^2 + (170)^2} = 520$$

Trovato il polo K delle giaciture, mandando l'orizzontale per O e la verticale per V (fig. 4) si possono ricavare i piani principali (fig. 5) e i piani di massimo scorrimento (fig. 6).

I valori massimi delle tensioni sui piani principali sono:

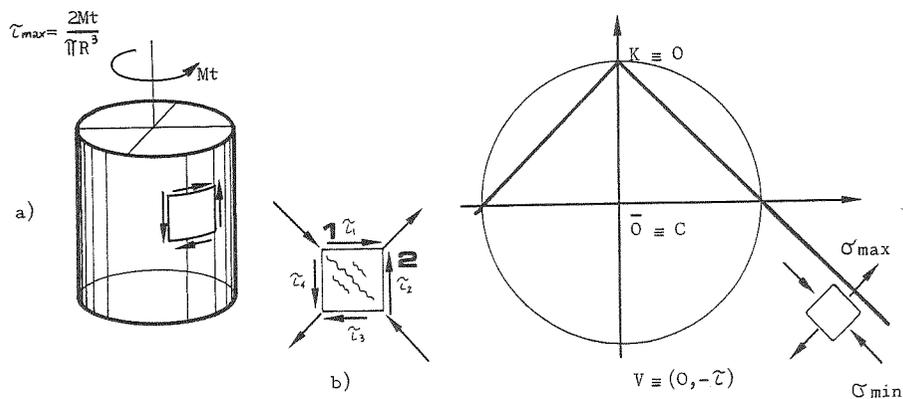
$$\sigma_{max} = \overline{OC} + R = 1010 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0$$

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - R = 30 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_0$$

mentre il massimo valore delle tensioni tangenziali (sui piani di massimo scorrimento) è:

$$\tau = \pm R = \pm 520 < \tau_0$$

La sezione non è quindi sottoposta a nessuna tensione, su un piano comunque inclinato, che superi i valori ammissibili.



Esercizio 4

Trovare i piani sui quali sono massime le σ (piani principali) in un solido sottoposto a sola torsione. Il solido è di forma cilindrica.

Se prendiamo un elementino del solido cilindrico, le cui facce siano una su una generatrice ed una ortogonale ad essa, le tensioni che si generano son tutte tangenziali (1). Inoltre si sa che sia le τ generate dal M_t , che le τ reciproche sono tutte di uguale valore. E' intuitivo allora

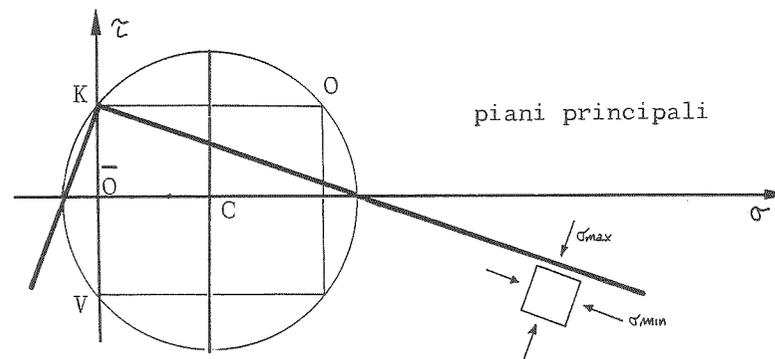
(1) BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, § 142.

che, componendosi le τ_1 con le τ_2 e le τ_3 con le τ_4 , si formano due tensioni uguali e contrarie (inclinate secondo un angolo $\sigma = 45^\circ$ rispetto alla verticale) che producono una forza di trazione (v. fig. a) e b). E' questo il motivo per cui i solidi non resistenti a trazione, sottoposti a torsione, si lesionano lungo i piani inclinati di 45° rispetto alla verticale. Vogliamo dimostrare, applicando il cerchio di Mohr, la validità di queste considerazioni intuitive. Costruiamo allora il cerchio di Mohr.

Fissato il riferimento (σ, τ) , si considera la faccia 2 dell'elementino. Le tensioni su tale giacitura danno le coordinate di V . Essendo $\sigma = 0$ tali coordinate saranno $V (0 - \tau)$. (La τ è negativa per la convenzione sul segno del taglio). Si fissa allora V nel riferimento. Le

coordinate di C saranno $(0, \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2})$ ma essendo $\sigma_y = 0$ e $\sigma_z = 0$ si

avrà $C (0, 0)$, cioè il centro coincide con l'origine degli assi. Si può ora disegnare il cerchio. Si manda ora per V la verticale. Poiché K è il polo attraverso cui debbono passare tutte le parallele alle giaciture m considerate, anche la giacitura 2 passerà per K , e quindi l'intersezione della parallela a 2 passante per V determinerà proprio K . Si può parimenti constatare che $K \equiv O$. Dalla costruzione fatta si vede come i piani considerati per la costruzione del cerchio sono quelli di massimo scorrimento (τ_{max} e τ_{min}). Volendo determinare ora i piani in cui si ha σ_{max} e σ_{min} (piani principali), bisogna tracciare una retta per K e per un punto M in cui si abbia σ massima. Tale punto ha ovviamente coordinate (O, R) . Il piano su cui si hanno σ_{max} è dunque inclinato di 45° rispetto ai piani di massimo scorrimento e tale valore massimo di σ sarà $\sigma_{max} = R = \tau$. I piani in cui σ è minima saranno ortogonali a quelli in cui σ è massima e si avrà $\sigma_{min} = -R = -\tau$.



Esercizio 5

Determinare i piani rispetto ai quali si hanno tensioni σ massime e minime (piani principali) e quelli rispetto ai quali si hanno tensioni tangenziali massime (piani di massimo scorrimento) in un solido cilindrico sottoposto a sollecitazioni di torsione e sforzo assiale di trazione. E' noto M_t , N e il raggio R .

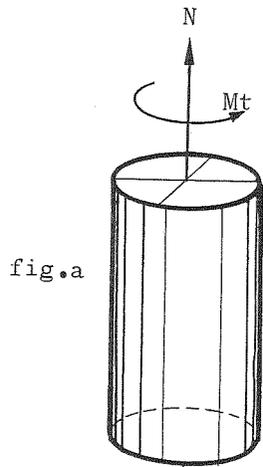


fig.a

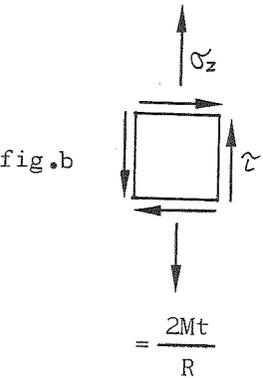


fig.b

Si possono quindi conoscere le tensioni σ e τ su un elemento superficiale. Infatti:

$$\tau = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \quad \sigma_z = \frac{N}{\pi R^2}$$

Si conoscono cioè le tensioni su due piani tra loro ortogonali, per la reciprocità delle τ (vedi fig. b). Fissato un riferimento (σ, τ) , si considerano le tensioni note σ_z e τ su una giacitura orizzontale, che sono le coordinate del punto O . Siccome la giacitura relativa ad O è orizzontale, mandando una retta orizzontale per O , questa incontrerà il cerchio del polo K . Conoscendo O e determinando le coordinate del centro

$$C \left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}, 0 \right); \quad C \left(\frac{\sigma_z}{2}, 0 \right)$$

si può disegnare il cerchio e ricavare, come si è detto, K . Il punto K è il polo delle giaciture cioè il punto per il quale dovrà passare anche la parallela alla giacitura in cui si ha σ_{max} . L'altro punto per il quale dovrà passare la parallela alla giacitura di σ_{max} è il punto sull'asse σ delle ascisse in cui si ha σ_{max} cioè il punto di coordinate:

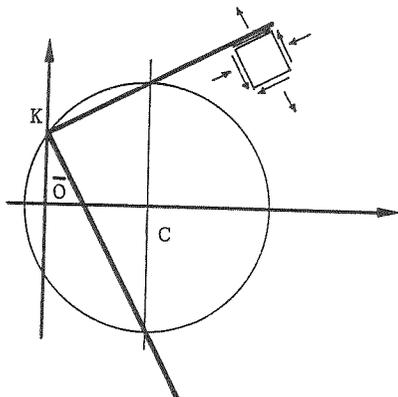
$$\tau = 0 \quad \sigma = \overline{OC} + R = \frac{\sigma}{2} + R$$

Il piano di σ_{min} è poi ortogonale a quello trovato. Poiché σ_{min} ha valore negativo, sulla giacitura corrispondente lo sforzo sarà di compressioni. Si noti che essendo $\sigma_y = 0$ il polo K si trova sull'asse τ delle ordinate. Per determinare ora i piani di massimo scorrimento basta unire K con

i punti della circonferenza in cui si ha τ_{max} e τ_{min} . Questi due punti hanno in comune l'ascissa $\frac{\sigma_z}{2}$. Que-

sto significa che sui piani di massimo scorrimento trovati (vedi figura a destra), si avranno delle τ tutte uguali in modulo, e tensioni σ pari a $\frac{\sigma_z}{2}$. Il valore di queste tensioni tangenziali è:

$$\tau_{max} = R \quad \tau_{min} = -R$$



Esercizio 6

In un elementino cubico sottoposto a pressione idrostatica (immerso nell'acqua) si vogliono trovare le tensioni, al variare dell'orientamento.

Nel caso della pressione idrostatica la tensione è uguale su tutti i punti di un solido, quindi, detta σ_y la tensione normale perpendicolare al piano xz e σ_x quella ortogonale a zy , si avrà $\sigma_y = \sigma_x$, e più in generale, qualunque sia l'angolo che il solido (o meglio l'asse x adesso associato) forma con la orizzontale, si avranno sempre le stesse tensioni normali. E' quanto ci proponiamo di dimostrare attraverso la teoria del cerchio di Mohr. Si noti che il problema non è sostanzialmente diverso da quello dei casi precedenti in cui si ricercavano, le tensioni e il loro modo di variare rispetto alle diverse giaciture. In questo caso infatti, invece di considerare l'orientamento delle giaciture all'interno di un solido che rimane fermo, si considera il variare delle tensioni sempre sulle stesse facce al ruotare dell'elemento.

Come si è visto, per costruire un cerchio di Mohr, bisogna, fissato un sistema di assi di riferimento (σ, τ) , individuare un punto della circonferenza (V se si considerano le tensioni sulle facce verticali, O se si assumono invece come coordinate le tensioni sulle facce orizzontali) e quindi determinare la posizione del centro C ricordandone le coordinate:

$$C \equiv \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

e poiché si ha $\sigma_x = \sigma_y$ si avrà anche:

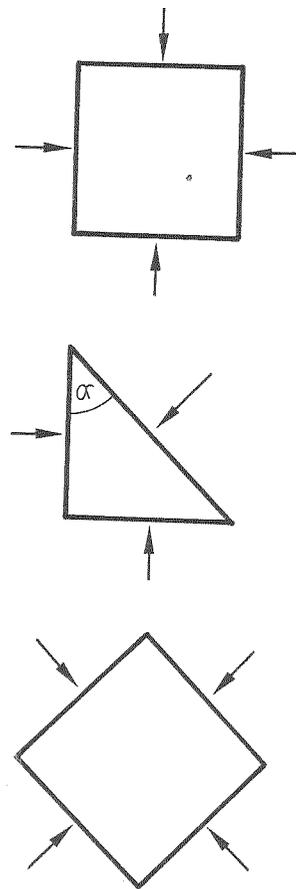
$$C \equiv \left(\frac{-\sigma - \sigma}{2}, 0 \right) \quad C \equiv (-\sigma, 0)$$

(il segno è negativo perché la sollecitazione prodotta da entrambe le σ è di compressione). Si può ora notare che le coordinate del punto O , date dalle tensioni sulle facce orizzontali, sono uguali a quelle di C .

$$O \equiv (-\sigma, 0)$$

$$C \equiv (-\sigma, 0)$$

$$C \equiv 0$$



caso in cui si considerano le variazioni di giacitura

caso in esame

Questo significa che un punto della circonferenza (O), coincide con il centro (C), e cioè l'intera circonferenza si riduce a un punto di coordinate σ e O . Il raggio sarà ovviamente nullo, come si può verificare dalla sua espressione:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau_{xy}}$$

ed essendo $\sigma_y = \sigma_x$ e $\tau_{xy} = 0$ per l'assenza di tensioni tangenziali si ha:

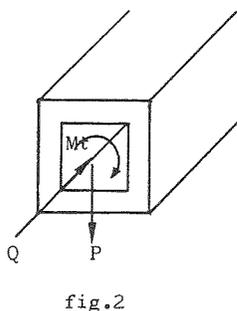
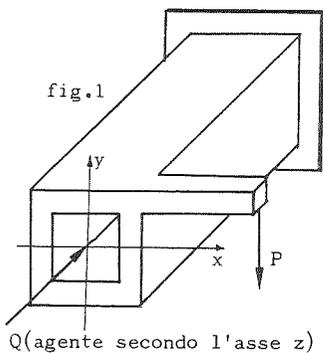
$$R = \sqrt{\frac{-\sigma + \sigma}{2} + 0} = 0$$

Anche il punto K , ottenuto mandando l'orizzontale per O , coinciderà con C e lo stesso il punto V ; si avrà cioè:

$$O = C = K = V$$

e quindi per qualsiasi posizione dei piani del solido, le coordinate del punto che ne individua le tensioni saranno sempre $-\sigma$ e O , cioè le tensioni sulle facce non variano al variare della posizione di un solido immerso in un liquido, come si voleva dimostrare.

Esercizio 7



Si vuole studiare, attraverso il cerchio di Mohr, l'andamento delle tensioni nella sezione più sollecitata del sistema in figura 1.

Si tratta di una trave scatolare incastrata da un'estremità e recante sull'altro estremo una barra. Le forze agenti sono Q (sull'asse della trave) e P (applicata all'estremo della barra). Indicati, come al solito, z l'asse del riferimento secondo l'asse della trave, e xy gli assi sul piano della sezione, si nota che il sistema produce sulla trave il caso più generale di sollecitazione. Infatti, trasportato P nel baricentro della sezione, si ha (fig. 2) una sollecitazione di sforzo normale dovuta a Q , uno sforzo di taglio dovuto a P e un momento torcente M_t dovuto alla coppia generata dal trasporto di P . Nell'estremo libero non si ha momento flettente, tuttavia, avvicinandosi all'incastro, il M_f aumenterà, a causa di P , con legge lineare. Sono

dunque presenti tutte le sollecitazioni: N , T , M_f , M_t . Bisogna ora individuare, attraverso i diagrammi di sollecitazione, la sezione più sollecitata. L'intero studio verrà condotto secondo il seguente schema:

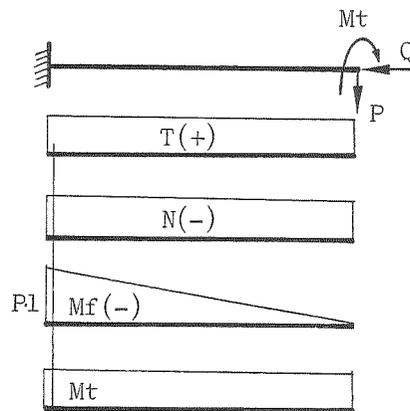
- 1) Diagrammi di sollecitazione
- 2) Ricerca della sezione maggiormente sollecitata
- 3) Studio delle tensioni dovute a N , T , M_f , M_t nella sezione maggiormente sollecitata
- 4) Individuazione del livello (o i livelli) della sezione aventi maggiori tensioni
- 5) Individuazione in tale livello delle giaciture in cui si ha σ_{max} (piani principali) e τ_{max} (piani di massimo scorrimento) (1).

1) DIAGRAMMI DI SOLLECITAZIONE (sul piano z , y)

Il diagramma del taglio è costante essendo dovuto al solo P , quello dello sforzo normale è ugualmente costante e così pure quello del momento torcente. L'unico diagramma che varia è perciò quello dei momenti flettenti che passa da un valore nullo alla estremità dello sbalzo a un valore $M_f = P \cdot l$ all'incastro (l = lunghezza dello sbalzo).

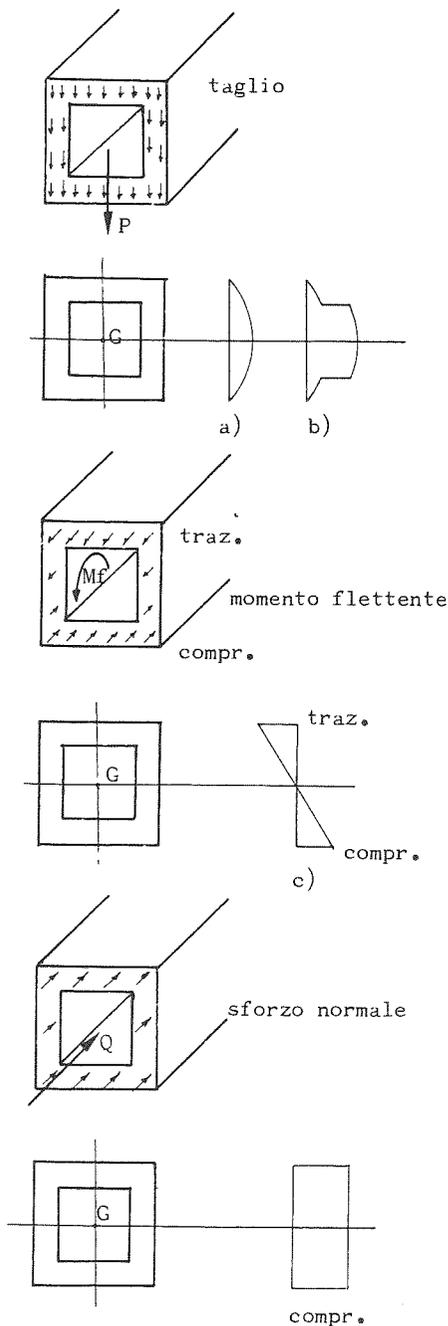
2) RICERCA DELLA SEZIONE MAGGIORMENTE SOLLECITATA

Sarà ovviamente quella dell'incastro, dove è massimo M_f . Tuttavia per lo studio delle tensioni non è possibile considerare proprio la sezione d'incastro, ma una nelle vicinanze. Infatti, per il principio di Saint Venant (2) le tensioni si distribuiscono in maniera uniforme solo ad una certa distanza dalla sezione sollecitata direttamente dalle forze esterne, e le reazioni vincolari che si producono allo incastro sono appunto forze esterne.



(1) Il problema è quello di determinare la sezione più sollecitata, ma all'interno di quella sezione le tensioni non sono uniformi, poiché si distribuiscono secondo leggi che variano a seconda del tipo di sollecitazione. Conoscendo tali leggi, bisogna determinare il punto in cui queste tensioni sono massime (livello di massima tensione della sezione) e poi stabilire, in tale punto (o meglio intorno) per quali giaciture si hanno le maggiori σ e le maggiori τ .

(2) Vedi BELLUZZI - Vol. I, pag. 10 § 12.



3) STUDIO DELLE TENSIONI NELLA SEZIONE MAGGIORMENTE SOLLECITATA

a) Taglio

In una sezione di trave in cui sia noto il taglio, è possibile conoscere il valore della tensione in un qualsiasi elementino attraverso la espressione:

$$\tau = \frac{T}{J_x} \cdot \frac{S_i}{b_i}$$

dove b_i è la larghezza della sezione variabile in funzione dell'altezza y (1). Se b fosse costante, come è il caso delle sez. rettangolari, varierebbe soltanto il momento statico S_i , e il diagramma delle tensioni avrebbe andamento parabolico con un massimo in corrispondenza del baricentro. (diagr. a). Poiché invece la b_i varia bruscamente in corrispondenza della cavità, il diagramma sarà simile al precedente, ma con delle discontinuità nei punti in cui varia la b (diagramma b) (2). Il maggiore sforzo di taglio viene quindi sopportato dai lati verticali (assimilabili in questo caso all'anima di un profilato a doppio T).

b) Momento flettente

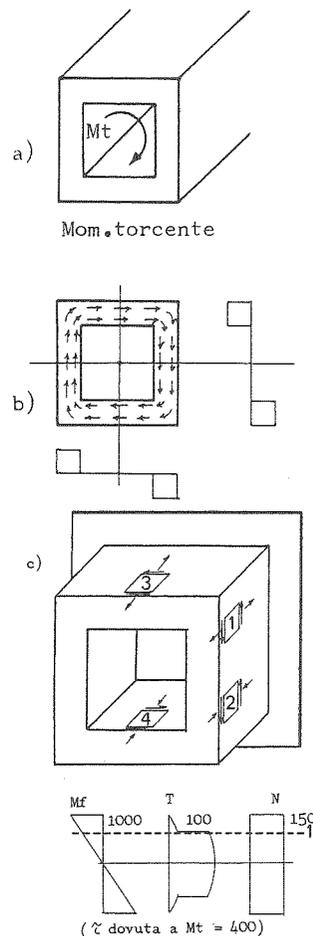
Il momento flettente produce delle tensioni normali σ di trazione e compressione il cui andamento è dato dall'espressione:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_x}$$

La legge di variazione lineare ha un σ_{max} di trazione sul bordo superiore della trave e un σ_{max} ne-

(1) V. BELLUZZI, pag. 236, § 168.

(2) V. BELLUZZI, pag. 235, § 167.



gativo (compressione) sul bordo inferiore. σ ha valore nullo in corrispondenza del baricentro G. (diagramma C) (1).

c) Sforzo normale

Lo sforzo normale è costante e negativo in tutti i punti della sezione considerata. Nell'espressione:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

infatti non vi sono quantità variabili (2) (3).

d) Momento torcente

Considerando lo spessore delle pareti della trave sufficientemente piccolo rispetto alla sezione, si può applicare la formula di Bredt (4) per sezioni cave e in un punto qualsiasi della trave si ha:

$$\tau = \frac{Mt}{2A^*}$$

(dove A^* è l'area compresa nella linea media del contorno). Ciò si considera (dato il piccolo spessore), la tensione τ costante all'interno della sezione (5). Si noti, in relazione al diagramma delle tensioni dovute al taglio, che nella par-

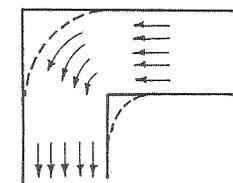
(1) V. BELLUZZI, pag. 165, § 125.

(2) V. BELLUZZI, pag. 120, § 104.

(3) *E' molto importante non confondere le tensioni che si producono su una sezione a causa delle sollecitazioni trasmesse dalle sezioni vicine con le tensioni che si generano nel materiale e che tendono ad equilibrare le forze prodotte dalle prime. Le due tensioni hanno infatti verso contrario.*

(4) V. BELLUZZI, pag. 217, § 157 e pag. 221, § 158.

(5) *In realtà è noto che nei bordi interni, quando gli spigoli non sono arrotondati, le tensioni tangenziali si addensano e la distribuzione delle τ non è uniforme analogia (idrodinamica). Tuttavia per semplicità si sono ritenute le τ uniformemente distribuite (V. BELLUZZI, p. 208, § 150 e pag. 225, § 160).*



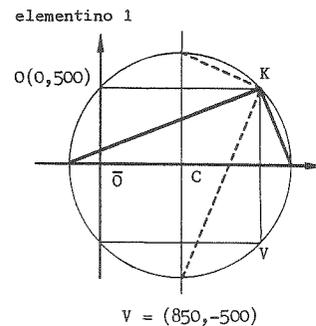
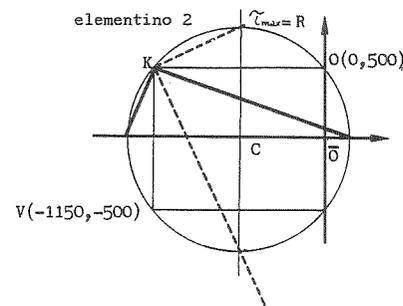
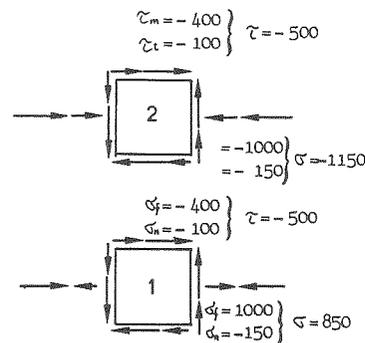
te sinistra della sezione (fig. b), le τ dovute al taglio sono di segno contrario a quelle dovute al mom. torcente, mentre nella parte destra le τ dovute a T e quelle dovute a M_t hanno lo stesso segno e quindi si sommano. Questo significa che, per quel che riguarda le tensioni tangenziali, la parte di destra è la più sollecitata.

4) INDIVIDUAZIONE DEL LIVELLO DELLA SEZIONE AVENTE MAGGIORI TENSIONI

Bisogna ora stabilire in quale punto della sezione bisogna applicare la teoria del cerchio di Mohr per conoscere quale direzione hanno σ_{max} e σ_{min} . Conoscendo tutte le tensioni agenti sulla sezione e conoscendone il verso, possiamo giudicare dove sono maggiori e minori le tensioni esaminando diversi elementini sulle varie facce. Nel caso di incertezza si può applicare il cerchio di Mohr a diversi elementini. Consideriamo ad esempio l'elementino 3 di fig. c), situato in prossimità del lembo superiore della trave: su di esso agiranno delle σ_z di trazione dovute al M_t , delle σ_z di compressione dovute allo sforzo normale, delle τ dovute al M_t e al taglio che si compongono. Poiché le σ_z dovute al M_t e ad N si sottraggono, le tensioni normali non sono molto forti su questa parte della sezione. Senz'altro di maggiore entità sono le σ_z sull'elementino 4 (opposto al 3) perché sia quelle dovute a M_t che quelle dovute ad N , hanno lo stesso segno e quindi si sommano, mentre le τ non hanno ugual verso. Nell'elementino 2 invece, pur essendo le σ_z dovute al M_t leggermente minori, oltre a sommarsi le σ_z , si sommano anche le τ dovute al momento torcente e al taglio. In questo elementino dunque le tensioni saranno senz'altro maggiori che nei precedenti. Consideriamo quindi l'elementino 2 e il suo simmetrico, l'elementino 1, e vediamo in quale dei due (uno dei quali è certamente luogo delle tensioni maggiori) le tensioni assumono maggior valore. Le tensioni che si ottengono in tali livelli sono naturalmente funzione delle caratteristiche geometriche della trave e dei carichi applicati, e si ricavano attraverso le formule ricordate. Supponiamo che, fatti i calcoli, vengano trovati nel livello dell'elementino 1 i valori della figura c). In figura non è stato naturalmente riportato il diagramma del M_t perché, pur essendo (in prima approssimazione) le tensioni costanti sulla sezione, mutano in direzione e verso nelle varie parti.

Individuazione dei piani di max scorrimento e dei piani principali nel livello della sezione avente maggiori tensioni

Consideriamo le tensioni agenti sull'elementino 2. Sulle facce verticali agiscono delle τ dovute al momento torcente e delle τ prodotte dal taglio aventi uguale direzione e segno. Esse perciò si sommano dando una τ complessiva pari a -500 kg/cm^2 . Sulle facce orizzontali ci saranno delle τ reciproche di uguale grandezza ma segno opposto. Le tensioni normali σ agiscono invece solo sulle facce verticali e, sia quelle prodotte da M_t che quelle causate da N , hanno uguale segno. Si ha perciò una σ complessiva pari a $\sigma_n + \sigma_f = -1150 \text{ kg/cm}^2$. Costruendo il cerchio di Mohr (in alto in figura), si ricava subito V



le cui coordinate corrispondono alle tensioni sulla faccia verticale; $V = (-1150, -500)$. Si individuano poi le coordinate del centro:

$$C = \left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$C = \left(-\frac{1150}{2}, 0 \right) = (575, 0)$$

Si può ora disegnare il cerchio e constatare (per verifica) che, determinando K con l'intersezione della verticale per V col cerchio, mandando l'orizzontale per K , questa interseca il cerchio in $O(0, \tau)$. Si possono ora determinare i piani principali, le cui tracce passano per K e i punti della circonferenza in cui si ha σ_{max} e σ_{min} . In questa giacitura si ha:

$$\sigma_{max} = R - 575$$

e

$$\sigma_{min} = -R - 575$$

ed essendo $R = \sqrt{575^2 + 500^2}$ (per il teorema di Pitagora) si ha:

$$R \approx 880$$

e quindi:

$$\sigma_{max} = 305 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{min} = -1455 \text{ kg/cm}^2.$$

L'angolo della giacitura è:

$$\alpha = \text{arctg. } 1150/500.$$

Per i piani di max scorrimento si ha invece una σ corrispondente alla σ media $= -575 \text{ kg/cm}^2$ associata sulle due facce ortogonali tra loro ai valori $\tau_{max} = R = 880 \text{ kg/cm}^2$ e $\tau_{min} = -R = -880 \text{ kg/cm}^2$. Come

si vede sull'elementino 2 si hanno tensioni negative (compressione), molto forti, e tensioni σ positive (trazioni) moderate. Costruendo il cerchio di Mohr per l'elementino 1 (in basso in figura), si nota che le τ sono uguali a quelle dell'elementino 2, mentre, essendo le σ dovute a M_t e quelle dovute ad N di segno opposto, la σ complessiva è $\sigma_f - \sigma_n = 850 \text{ kg/cm}^2$. Il punto V necessario alla costruzione del cerchio ha perciò coordinate $V = (850, -500)$, mentre il centro $C = (425, 0)$. Costruito il cerchio e individuato K si verifica che le coordinate di

$O = (0,500)$ corrispondono alle tensioni sulle facce orizzontali. Trovate le giaciture in cui sono maggiori le σ (piani principali) si trova che:

$$\sigma_{max} = R + 425 \quad \sigma_{min} = -R + 425$$

ed essendo:

$$R = \sqrt{425^2 + 500^2} = 665$$

si ha:

$$\sigma_{max} = 1090 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{min} = -240 \text{ kg/cm}^2$$

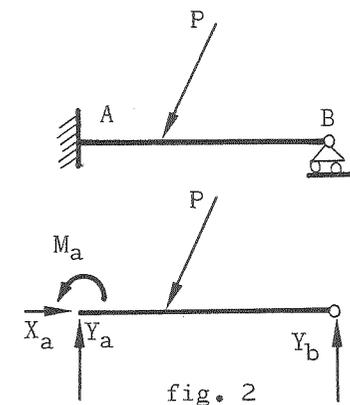
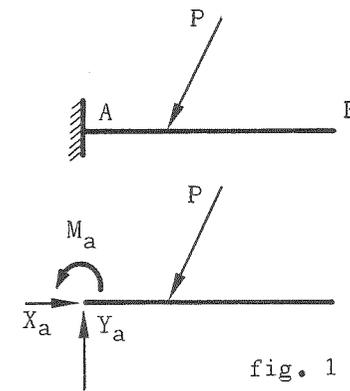
Cioè l'elementino 1 è soggetto a forti tensioni σ di trazione, rispetto a quelle di compressione. In totale le tensioni maggiori si hanno quindi nell'elementino 2 con $\sigma = -1455 \text{ kg/cm}^2$ di compressione. Tuttavia se il materiale non resiste a trazione bisogna tenere presente che la tensione positiva maggiore si ha per la giacitura trovata dell'elementino 2 pari a 1190 kg/cm^2 .

Parte terza IPERSTATICA

Le strutture finora esaminate erano di tipo isostatico, avevano cioè un numero di vincoli strettamente sufficiente a impedire qualsiasi movimento. Questo significa, per quello che riguarda il loro studio, che tali strutture erano anche staticamente determinate, che cioè bastavano le equazioni cardinali della statica a determinare il valore delle forze che venivano sviluppate nei vincoli. Se a tali strutture aggiungiamo uno o più vincoli otteniamo sistemi iperstatici, e quindi sistemi staticamente indeterminati, nel senso che le sole equazioni cardinali della statica non sono sufficienti a risolverli. Infatti aggiungendo alla struttura dei vincoli sovrabbondanti aggiungiamo anche delle incognite alla soluzione del problema, incognite cui non corrispondono adeguate equazioni, data l'ipotesi fatta che le strutture vengono considerate indeformabili.

Dal punto di vista delle equazioni cardinali della statica esistono quindi, per un sistema iperstatico, infinite soluzioni, tutte equilibrate. La cosa si chiarisce con un esempio. Consideriamo una mensola, sistema isostatico, caricata con un carico P qualsiasi (fig. 1). Il suo estremo libero B è libero di abbassarsi a causa della inflessione della trave.

Se aggiungiamo all'estremo B un carrello la struttura ha un grado di vincolo in più dello stretto necessario, è cioè una volta iperstatica (fig. 2). In questo caso dal punto di vista delle deformazioni, viene impedito l'abbassamento del punto B . Utilizzando le equazioni cardinali



della statica otteniamo un sistema di tre equazioni in quattro incognite (Y_a , X_a , M_a e Y_b), e un sistema a incognite sovrabbondanti presenta, come è noto, infinite soluzioni. Esisteranno allora infinite combinazioni di valori delle reazioni che possono mantenere in equilibrio il sistema. Ma se conosciamo il valore di Y_b il sistema sarebbe risolubile perché potremmo sostituire al carrello il valore della sua reazione e il problema diventerebbe staticamente determinato. Per far questo dobbiamo rinunciare all'ipotesi semplificativa della indeformabilità delle travi, perché è proprio lo studio delle deformazioni che ci permetterà di determinare il valore di Y_b . Togliamo di nuovo il carrello e sostituiamolo con la forza incognita Y_b .

Se assegnamo a Y_b uno qualsiasi dei valori che danno una configurazione equilibrata, tale valore potrebbe essere troppo piccolo (fig. 3) (e allora il punto B si abbasserebbe in B'), o troppo grande (fig. 4) (e allora il punto B salirebbe in B''). Si intuisce che tali valori non sono accettabili perché in contrasto con l'ipotesi, sempre valida, della bilateralità dei vincoli.

Tali soluzioni allora, sebbene equilibrate, non sono *congruenti*, non sono cioè compatibili con le reali condizioni statiche della struttura. Esisterà allora solo un valore di Y_b che, oltre a dare una soluzione equilibrata, dia pure una soluzione congruente. La soluzione congruente si ottiene quando, sotto l'effetto di tutte le forze agenti (attive e vincolari) e di Y_b , il punto B non si sposta.

Scrivendo questa condizione con un'equazione si ha:

$$\uparrow \delta_b(P, Y_b) = 0$$

e cioè lo spostamento verticale del punto B (in questo caso verso l'alto ma avremmo anche potuto scrivere $\downarrow \delta_b$ verso il basso) dovuto al carico e all'incognita iperstatica, deve essere nullo. In termini operativi si calcolerà lo spostamento di B considerando a tutti gli effetti Y_b come una forza, e si imporrà poi la condizione che questo spostamento sia nullo ottenendo un'equazione nella sola incognita Y_b .

Le equazioni di questo tipo sono dette *equazioni di congruenza*, e possono essere scritte in numero pari alle incognite iperstatiche. Come si vede è solo lo studio delle deformazioni (in questo caso lo spostamento verticale di B) che permette la soluzione dei sistemi iperstatici. Si comprende allora che nel determinare le reazioni di tali sistemi compariranno tutti quei fattori connessi con le deformazioni (caratteristiche elastiche e geometriche della sezione) che non comparivano nella soluzione dei sistemi precedenti. E' chiaro che a questo punto sono necessari degli strumenti che diano

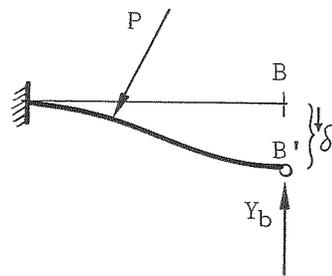


fig. 3

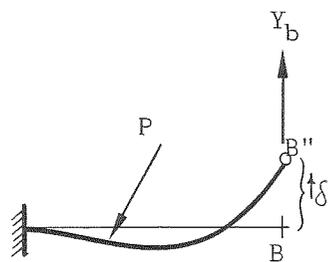


fig. 4

il valore dello spostamento di un punto qualsiasi della struttura in una direzione qualsiasi.

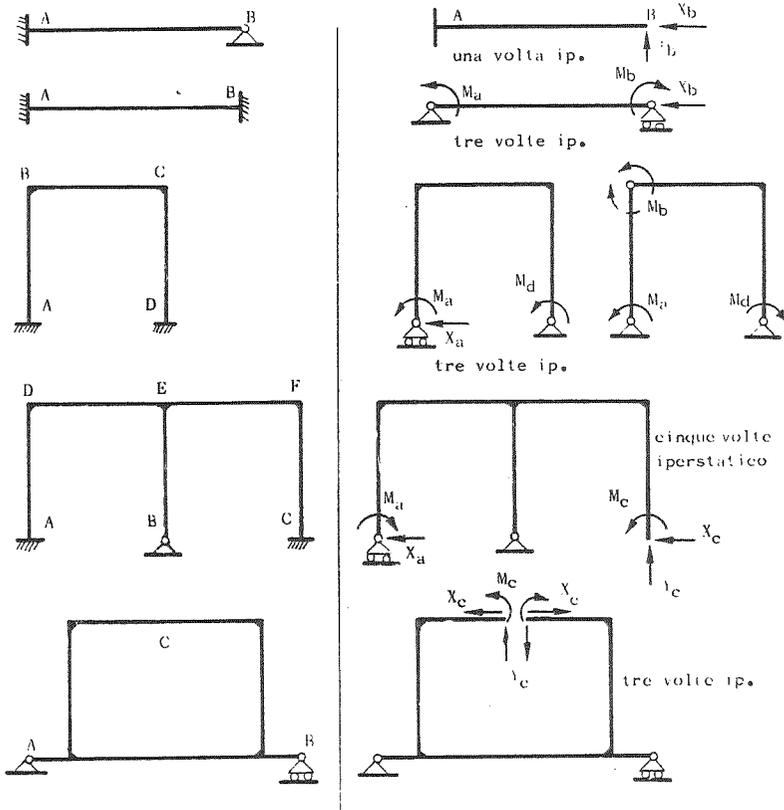
Di tali strumenti quelli maggiormente usati sono l'*equazione della linea elastica*, che da la funzione della deformata di una trave, e il *metodo di Betti* (1), che da in termini operativi i mezzi per calcolare lo spostamento di uno o più punti della struttura. Riconducibili al primo sono i metodi di Mohr e Saviotti (2) e al secondo i metodi derivati dai teoremi di Maxwell, Castigliano, Menabrea e dal teorema dei lavori virtuali (3).

-
- (1) O. BELLUZZI, vol. I, pag. 301 e seg. e pag. 620 e seg.
 - (2) O. BELLUZZI, vol. I, pag. 311 e seg.
 - (3) O. BELLUZZI, vol. I, cap. XV e XVI.

Esercizio 1

Stabilire il grado di iperstaticità dei sistemi nella colonna sinistra e svincolarli introducendo le opportune incognite iperstatiche. E' chiaro che le soluzioni riportate nella colonna di destra sono solo alcune di quelle possibili.

Nell'ultimo esempio si è aperta la maglia chiusa tagliandola in C e introducendo le incognite iperstatiche. Poiché una maglia chiusa è tre volte iperstatica per vincoli interni e il taglio toglie tre gradi di iperstaticità, il sistema è reso isostatico. In pratica è come (per rendere l'idea) se avessimo tolto un incastro interno. In questo caso Y_c rappresenta il valore dello sforzo di taglio nella sezione, X_c lo sforzo normale e M_c il momento flettente.



EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

Il rapporto tra sollecitazioni e deformazioni in una trave sottoposta a forze nel piano di flessione è dato dall'espressione:

$$\frac{1}{r} = \theta = \frac{M}{EJ} \quad \text{a)}$$

Dove θ è l'angolo di curvatura ed r il raggio di curvatura della trave. La curvatura della trave è cioè proporzionale al momento flettente dovuto ai carichi agenti e inversamente proporzionale alle caratteristiche di resistenza dovute al materiale (E) e alle caratteristiche geometriche (J) della trave (1).

Il problema che si presenta nella determinazione della linea elastica è quello di stabilire una funzione $v = v(z)$ che esprima, in un opportuno sistema di riferimento, l'andamento della deformazione nell'asse geometrico della trave (v figura). L'equazione della linea elastica è quindi l'equazione della curva $v = v(z)$ in cui si trasforma l'asse geometrico della trave sotto la sollecitazione delle forze esterne. La curvatura in un punto della curva $v = v(z)$ è espressa dalla derivata seconda in quel punto (2) e cioè:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dz^2}$$

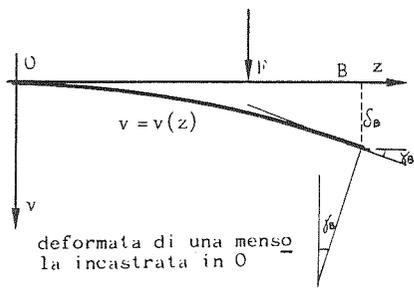
e sostituendo questa espressione della curvatura in a) si ottiene l'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M}{EJ} \quad \text{b)}$$

che è un'equazione differenziale di 2° grado le cui costanti di integrazione dipendono, come si vedrà negli esempi, dalle caratteristiche di vincolo. Assumendo l'asse z coincidente con l'asse geometrico della trave indeformata, e come direzione positiva di v quella verso il basso, viene posto il segno negativo davanti a M/EJ affinché sia positiva la equazione della linea elastica per i carichi verticali discendenti, che sono la maggioranza. Integrando la b) due volte si ricava $v(z)$ che esprime l'abbassamento in un generico punto di ascissa z , mentre inte-

(1) BELLUZZI, pag. 168.

(2) A. CHIPELLINI, *Analisi matematica e geometria analitica*, 2° vol., p. 259 e seg.; G. TEDONE, *Meccanica razionale*, pag. 26.



grando una sola volta la b) si ottiene la funzione dv/dz , derivata prima dell'equazione della linea elastica.

Questa rappresenta, per la definizione di derivata prima, la tangente γ dell'angolo che la retta tangente in un generico punto forma con l'asse delle ascisse (v. figura) (1).

La derivata prima $\frac{dv}{dz}$ esprime

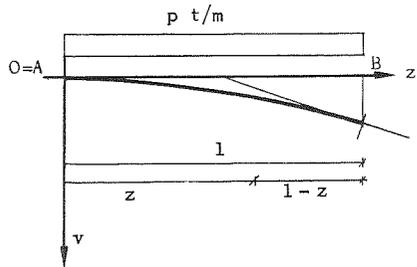
quindi l'angolo di cui ruotano le sezioni di una trave a causa delle sol-

lecitazioni esterne. In realtà le sollecitazioni esterne che producono deformazione nella trave deformandone l'asse geometrico sono anche quelle dovute alle azioni di taglio che però si trascurano essendo molto modeste.

Esercizio 2

Calcolare l'equazione della linea elastica di una mensola con carico ripartito uniformemente a sezione costante, e abbassamento e rotazioni nell'estremo libero B.

Fissato il sistema di riferimento in modo tale che l'incastro in A coincida con l'origine degli assi, per applicare l'equazione della linea elastica:



$$\frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M}{EJ}$$

bisogna conoscere la legge di $M(z)$, variabile in funzione delle ascisse. La quantità EJ , essendo la trave omogenea in materiale e costante in sezione, è un dato del problema. Detta l la lunghezza della

mensola, la legge del carico essendo $P = cost$, la legge di variazione del momento sarà:

$$M(z) = - \frac{P(l-z)^2}{2}$$

(1) Per una chiara esposizione della teoria della linea elastica con numerose esemplificazioni si veda il IV capitolo del testo: C. CERADINI, *Meccanica applicata alle costruzioni*, ed. Vallardi, Milano 1921.

il segno negativo essendo dovuto al fatto che sono tese le fibre superiori. Sostituendo nell'equazione della linea elastica si ha:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{P(l-z)^2}{2EJ} = \frac{P(l^2 + z^2 - 2lz)}{2EJ} = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l^2}{2} + \frac{z^2}{2} - lz \right]$$

integrando una prima volta si ottengono le rotazioni:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l^2z}{2} + \frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{2} \right] + C_1 = tg \gamma \approx \gamma$$

La costante di integrazione C_1 rappresenta in questo caso la rotazione iniziale della sezione nell'incastro A. Se l'incastro è perfetto non vi sono rotazioni iniziali della sezione d'incastro e quindi si ha $C_1 = 0$, altrimenti si sostituisce a C_1 tale valore iniziale delle rotazioni. Supponendo l'incastro perfetto il valore dell'angolo γ_b in B (assimilabile, per la piccolezza dell'angolo, alla sua tangente $tg \gamma_b$), si ricava sostituendo a z il suo valore in B, cioè l . Si ha quindi:

$$tg \gamma_b \approx \gamma_b = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l^3}{2} + \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} \right] = \frac{Pl^3}{6EJ} \quad (\text{rotazione massima})$$

Per ottenere l'equazione della linea elastica, e cioè l'espressione degli abbassamenti δ in ogni punto dell'asse geometrico della trave, bisogna integrare la funzione $\frac{dv}{dz}$ e si ha quindi:

$$v(z) = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l^2z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{6} \right] = \delta$$

e l'abbassamento nell'estremo libero B, dove $z = l$ sarà:

$$\downarrow \delta_b = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{6} \right] = \frac{Pl^4}{8EJ} \quad (\text{abbassamento massimo})$$

Il valore dell'abbassamento risulta espresso in cm. Infatti l'equazione dimensionale di $\downarrow \delta_b$ è:

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^4}{\text{cm} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \text{cm}^4} = \text{cm}.$$

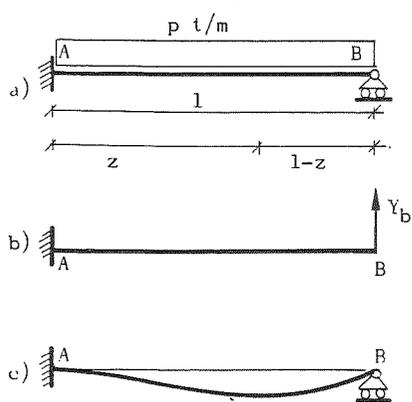
L'equazione della linea elastica è una curva del 4° ordine. Infatti, integrando successivamente si ha:

- P = costante (ordine 0)
- T = lineare (1° ordine)
- M_l = 2° ordine
- γ = 3° ordine
- δ = 4° ordine

L'abbassamento massimo (in questo caso δ_b) viene detto freccia.

Esercizio 3

Determinare le reazioni vincolari in una trave incastrata nello estremo A e appoggiata in B con carico ripartito uniformemente P.



Essendo il sistema iperstatico le equazioni cardinali della statica non sono sufficienti a determinare le quattro incognite vincolari. Il sistema è una volta iperstatico; basta quindi determinare una incognita vincolare (ad esempio Y_b) senza lo ausilio delle equazioni della statica, perché siano determinate anche le altre 3.

Prima operazione da fare è quella di rendere il sistema isostatico, sostituendo a un vincolo (il carrello in questo caso), la corrispondente incognita vincolare (Y_b) come in fig. b). Si determina quindi l'equazione

della linea elastica considerando il sistema come una mensola caricata con carico ripartito p e una forza all'estremo B, Y_b . Una volta ottenuta l'equazione della linea elastica si ricava l'abbassamento in B, il quale sarà funzione di Y_b , e poiché per le condizioni di vincolo il punto B non si deve abbassare (v. fig. c) si imporrà la condizione $\delta_b = 0$ che fornisce la reazione incognita Y_b . Nell'espressione generale della linea elastica

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}$$

bisogna sostituire il valore di M in funzione dei carichi, riferito alla ascissa z di origine A. Detta l la lunghezza della trave si ha:

$$M(z) = Y_b(l-z) - \frac{P(l-z)^2}{2}$$

per cui l'equazione della linea elastica della trave è:

$$-EJ \frac{d^2v}{dz^2} = Y_b(l-z) - \frac{P(l-z)^2}{2} = Y_b(l-z) - \frac{P(l^2 + z^2 - 2lz)}{2}$$

e integrando:

$$-EJ \frac{dv}{dz} = Y_b \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) - P \left(\frac{l^2 z}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{lz^2}{2} \right)$$

che è l'espressione delle rotazioni delle sezioni. La costante iniziale dell'integrazione, che rappresenta la rotazione iniziale in A, è nulla,

poiché, supponendo l'incastro in A perfetto, la sezione in A non ruota. integrando ancora si ha la linea elastica:

$$-EJ v(z) = Y_b \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) - P \left(\frac{l^2 z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \frac{lz^3}{6} \right)$$

Per trovare il valore di Y_b bisogna ora imporre la congruenza della deformata col vincolo in B. Bisogna cioè imporre nell'espressione $v(z)$ trovata (che da gli abbassamenti in ogni punto dell'asse geometrico) la condizione che in B (dove $z = l$) non vi siano abbassamenti. Si deve cioè avere $v(l) = 0$ e cioè:

$$-v(l) = Y_b \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right) - P \left(\frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{6} \right) = 0 \text{ da cui } Y_b = \frac{3Pl}{8}$$

Le tre rimanenti reazioni in A si possono ora ricavare attraverso le equazioni della statica avendosi 3 equazioni e tre incognite:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= X_a = 0 \\ \Sigma Y &= Y_a + Y_b - Pl = Y_a + \frac{3Pl}{8} - Pl = 0 \quad Y_a = \frac{5}{8} Pl \\ \Sigma M_a &= Y_b \cdot l - \frac{Pl^2}{2} = \frac{3Pl^2}{8} - \frac{4Pl^2}{8} = 0 \quad M_a = \frac{Pl^2}{8} \end{aligned} \right\}$$

Esercizio 4

Calcolare la rotazione e l'abbassamento dell'estremo libero A della mensola in figura (a sezione costante) mediante il metodo di Mohr (1).

Tracciato il diagramma dei momenti si carica la trave ausiliaria con il carico fittizio M/EJ , vincolandola (come in figura) nell'estremo A.

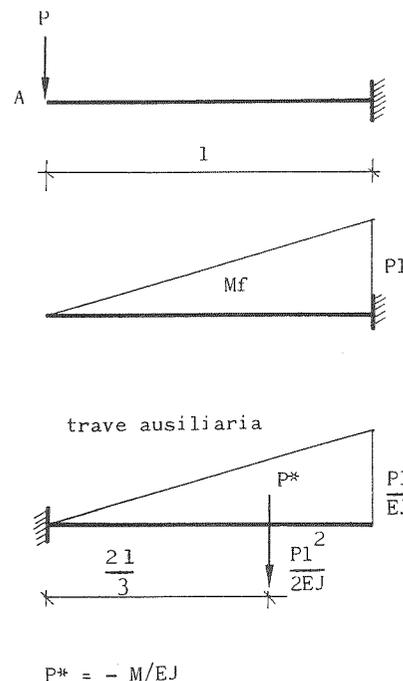
In questo modo si avrà il taglio fittizio massimo (rotazione massima) e il momento fittizio massimo (abbassamento massimo) in A.

Si tratta ora di calcolare il taglio fittizio in A che è uguale all'area del diagramma del momento fittizio.

$$T_* = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\text{da cui } \phi_A = \frac{Pl^2}{2EJ} \text{ (rotazione in A)}$$

(1) Per la teoria sul metodo di Mohr si veda O. BELLUZZI, vol. I, pag. 311 e seg.



e il momento fittizio in A:

$$M_* = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} \quad \downarrow \delta A = \frac{Pl^3}{3EJ} \quad (\text{abbassamento in } A)$$

Il vantaggio rispetto al metodo della linea elastica (di cui il metodo di Mohr non è che una graficizzazione) è quello di poter ottenere immediatamente delle soluzioni senza passare attraverso le integrazioni successive: se ad esempio si voleva conoscere l'abbassamento in A, col metodo della linea elastica bisognava integrare due volte l'equazione del carico, mentre col metodo di Mohr, come si è visto, basta calcolare il momento fittizio rispetto ad A.

Esercizio 5

Calcolare col metodo di Mohr l'abbassamento in mezzera e la rotazione in A della trave in figura a inerzia costante.

Tracciato il diagramma dei momenti si carica la trave ausiliaria col diagramma di carico fittizio:

$$P_* = M/EJ$$

(diagramma delle curvature).

Il taglio fittizio T_* darà le rotazioni e il momento fittizio M_* gli abbassamenti.

Il taglio T_* in A ha il valore della reazione R_* e la rotazione in tale sezione sarà quindi:

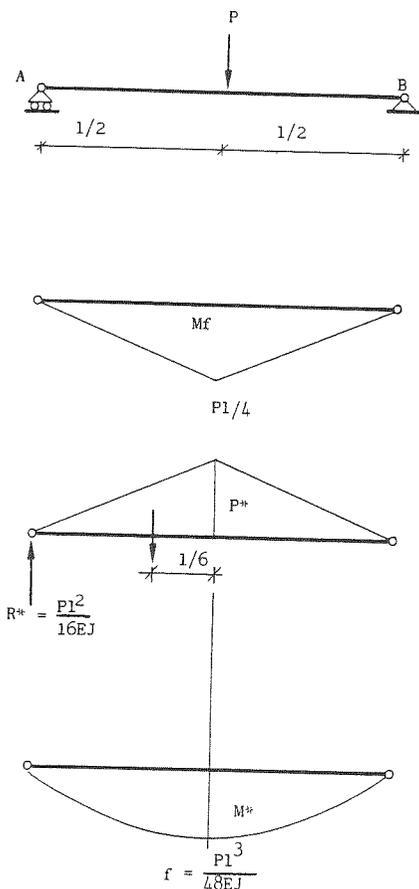
$$\varphi A = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

L'abbassamento in mezzera verrà calcolato trovando il momento fittizio rispetto a tale punto.

$$f_m = \frac{Pl^2}{16EJ} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16EJ} \cdot \frac{l}{6}$$

$$f_m = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

$$f_m = 0,0208 \frac{Pl^3}{EJ}$$



Si noti dai risultati che ha grande importanza nelle deformazioni il valore della luce l , che compare alla terza potenza, mentre le quantità che rappresentano la resistenza della trave (modulo di elasticità E e momento d'inerzia della sezione J) compaiono alla prima potenza.

Esercizio 6

Reazioni e diagrammi di sollecitazione di una trave su tre appoggi con carico uniformemente ripartito di 3 t/m. Le due campate hanno un'uguale luce di 6 m. e la sezione costante.

Il sistema è iperstatico e quindi bisogna degradare i vincoli in modo tale da ottenere una struttura isostatica, introducendo poi delle opportune incognite iperstatiche. Con una cerniera sull'appoggio 2 che interrompe la continuità della trave, il sistema è reso isostatico. Tuttavia il sistema ottenuto è molto diverso da quello in esame in quanto la cerniera introdotta non trasmette i momenti flettenti da una campata all'altra, con conseguenze intuibili sulle deformazioni. Per ristabilire la continuità tra le due parti di trave bisogna introdurre due momenti incogniti m'_2 e m''_1 , detti appunto « *momenti di continuità* ». Per l'equilibrio del cono in 2 (v. fig. 2), dovrà essere $m'_2 = m''_1$. Si indicheranno tali momenti (uguali e contrari) semplicemente con m .

Tale metodo di risoluzione si applicherebbe anche se la struttura continuasse. Si può ora applicare l'equazione dei quattro momenti che, scritta per intero è (1):

$$\begin{aligned} \omega' (m'_1 + 2m'_2) + \omega'' (2m''_1 + m''_2) = \\ \omega' (\mu'_1 + 2\mu'_2) + \omega'' (2\mu''_1 + \mu''_2) - \\ - \frac{6\delta'}{l'} + \frac{\delta''}{l''} \end{aligned}$$

ma essendo m'_1 e m''_2 i momenti trasmessi in 1 e 3 dal resto della struttura, si ha in questo caso:

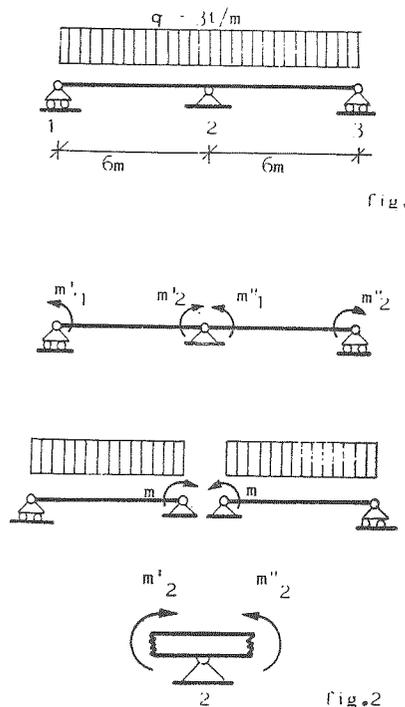
$$m'_1 = m''_2 = 0$$

e, non essendoci cedimenti:

$$\delta' = \delta'' = 0$$

I momenti d'incastro perfetto, per la simmetria della struttura valgono:

$$\mu'_1 = \mu'_2 = \mu''_1 = \mu''_2 = \frac{ql^2}{12}$$



(1) V. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, cap. XII.

e quindi l'equazione dei quattro momenti si semplifica nella seguente:

$$4m = 6 \left(\frac{ql^2}{12} \right) \text{ da cui } m = \frac{3 \cdot 6^2}{8} = 13,5 \text{ tm.}$$

Trovato il momento di continuità m si può considerare il sistema isostatico e procedere nel modo consueto per la determinazione delle reaz. vincolari e dei diagrammi.

REAZIONI VINCOLARI

Isolando le due campate si determinano le reazioni dovute al carico e al momento m . In 2 la reazione, per il principio di sovrapposizione degli effetti, sarà la somma delle reazioni trovate in 2 per le singole campate pensate isolate. Le reazioni dovute al carico ripartito sono di 9 t su tutti e quattro gli appoggi, mentre quelle che equilibrano le coppie valgono:

$$R = \frac{m}{l} = \frac{13,5}{6} = 2,25$$

con segno negativo sugli appoggi 1 e 3 (vedi fig. 3). Sommando gli effetti si ha:

$$R_1 = 9 - 2,25 = 6,75 \text{ t.}$$

$$R_2 = R'_2 + R''_2 = 2(9 + 2,25) = (11,25 \text{ t}) \cdot 2 = 22,5 \text{ t.}$$

$$R_3 = R_1 = 6,75 \text{ t.}$$

Controllo — Il carico totale vale $2 pl = 36 \text{ t}$. La somma delle reazioni deve uguagliare tale valore; infatti:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 6,75 + 22,5 + 6,75 = 36 \text{ t.}$$

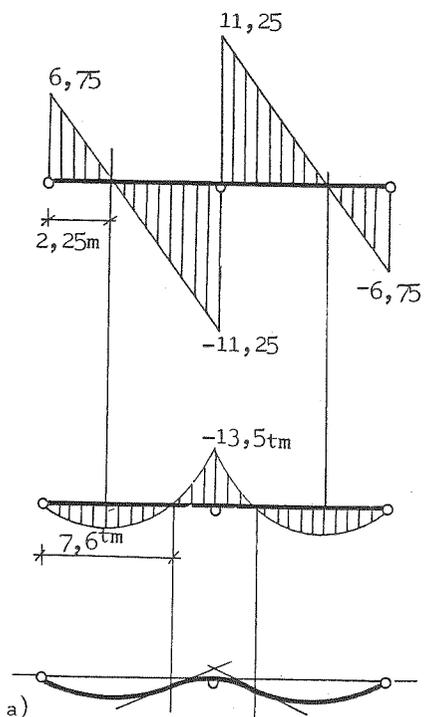
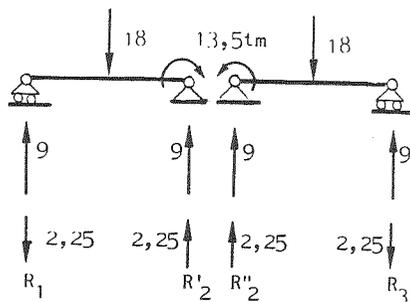
TAGLIO

Nella campata 1-2 la legge del taglio è:

$$T = R_1 - qx = 6,75 - 3x$$

e quindi il diagramma del taglio si annulla per:

$$x = \frac{6,75}{3} = 2,25 \text{ m}$$



e quindi a 2,25 m dall'appoggio 1 si avrà il massimo momento flettente. Per $x = l = 6$ il taglio vale $T_2 = -11,25 \text{ t}$. Il taglio nella campata successiva vale:

$$T = T'_2 + R_2 - qx' = -11,25 + 22,5 - 3x'$$

dove con x' si indica il nuovo sistema di ascisse con origine 2.

MOMENTO FLETTENTE

La legge del momento flettente nella prima campata vale:

$$M = R_1 x - \frac{qx^2}{2} = 6,75x - \frac{3}{2}x^2$$

mentre il diagramma nella campata successiva sarà, come per il taglio, specularmente simmetrico. Il momento massimo si ha, come si è visto, per $x = 2,25$ e vale:

$$M_{max} = 6,75 \cdot 2,25 - \frac{3}{2} (2,25)^2 = 7,6 \text{ tm}$$

mentre il M_1 in 2 vale, come è noto, $m = -13,5 \text{ tm}$. Il M_1 si annulla nei due punti (simmetrici rispetto all'asse della parabola passante per $x = 2,25$) di ascissa $x = 0$ e $x = 2,25 \cdot 2 = 4,5 \text{ m}$. Si può capire da questo dato e dalle informazioni precedenti l'andamento della deformata. Considerando infatti (per il teorema di Mohr) la linea elastica della trave come diagramma dei momenti del carico fittizio $P^* = M/EJ$, poiché il carico passa nel punto $x = 4,5 \text{ m}$ da valori positivi a valori negativi, la linea elastica avrà un flesso in $x = 4,5$, passando da una concavità rivolta verso l'alto a una rivolta verso il basso, come risulta interpretando il diagramma del M_1 (a meno della costante $1/EJ$) come

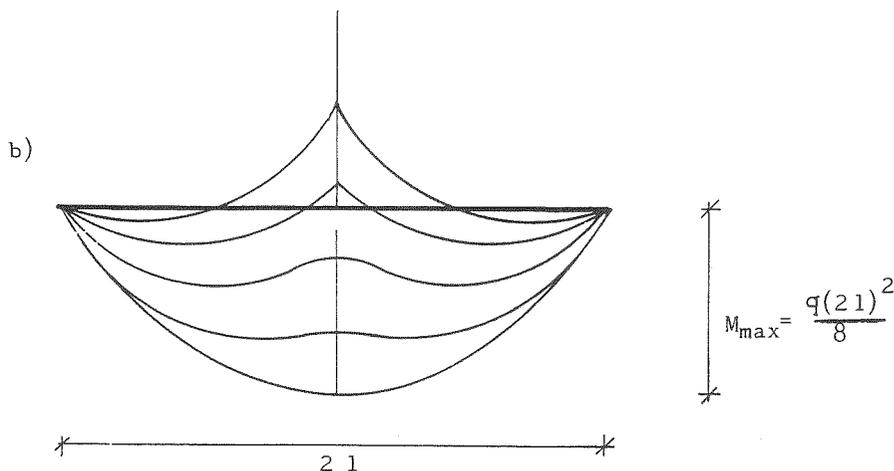


diagramma delle derivate seconde (diagramma delle curvature) della linea elastica. L'andamento approssimato sarà allora quello in fig. a).

CEDIMENTI EVENTUALI

Nello studiare la trave non sono stati previsti cedimenti. Questo fatto ha permesso di trovare le reazioni e di tracciare i diagrammi indipendentemente dalle caratteristiche elastiche del materiale (E) e dalle caratteristiche geometriche della sezione (J). Tuttavia è intuitivo che quando su reazioni e diagrammi influiscono i cedimenti non si può prescindere da tali caratteristiche: tanto più un materiale è rigido tanto più risentirà dei cedimenti. Pensiamo ad esempio ad un cedimento δ' nell'appoggio 2. L'equazione dei 4 momenti diventa allora:

$$4m = 6 \frac{ql^2}{12} - \frac{6\delta'}{l\omega} \text{ ed essendo } \omega = \frac{l}{EJ} \quad m = \frac{ql^2}{8} - \frac{\delta'EJ}{24}$$

ed essendo m il valore del momento negativo massimo diminuisce di una quantità proporzionale al cedimento δ' e alla rigidezza EJ (fig. b). All'aumentare del cedimento δ' il momento flettente negativo diminuisce ancora fino a passare a valori positivi e, al limite, (quando l'appoggio si distacca dalla trave) tale diagramma si trasforma in quello di una trave appoggiata nel punto 1 e 3.

Esercizio 7

Diagramma dei momenti flettenti di una trave metallica NP 240 su tre appoggi con un'asta verticale sull'appoggio centrale, caricata come in figura a) e con un cedimento differenziale in C di 2 cm.

La trave può essere resa isostatica (fig. 2) introducendo una cerniera in B che spezzi la continuità della trave e introducendo due momenti incogniti che rendano le rotazioni in B congruenti. Detti tali momenti m'_2 e m''_1 per l'equilibrio del nodo B si avrà (fig. 3 e 4):

$$m'_2 = F \cdot b + m''_1$$

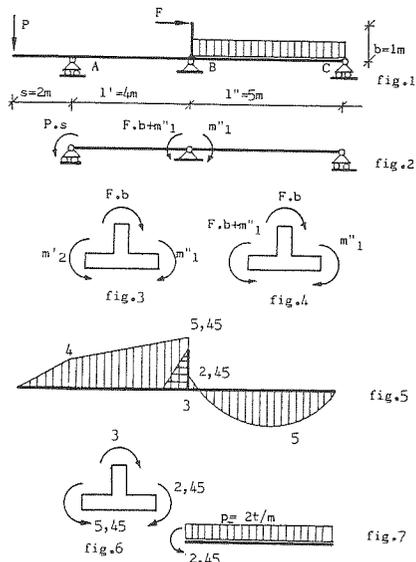
e quindi, essendo F_b una quantità nota, si avrà in B un solo momento in cognito. In A si avrà poi il momento:

$$m'_1 = P \cdot s = 4 \text{ tm.}$$

dovuto allo sbalzo.

Riassumendo, l'equazione dei 4 momenti che permette di determinare il momento incognito m''_1 , si può scrivere tenendo presente che:

$$\begin{aligned} m'_1 &= P \cdot s \\ m'_2 &= F_b + m''_1 \\ m''_2 &= 0 \end{aligned}$$



si ha allora:

$$\frac{l'}{EJ'} [P \cdot s + 2(F \cdot b + m''_1)] + \frac{l''}{EJ''} (2m''_1 + 0) = 3\mu'' \frac{l''}{EJ''} + \frac{6\delta''}{l''} \quad (A)$$

Il segno del contributo dovuto ai cedimenti differenziali è positivo in quanto C si abbassa rispetto a B . Poiché la trave è a sezione costante si ha $J' = J''$. Le caratteristiche geometriche del profilato NP 240 che interessano sono:

$$W_x = 353 \text{ cm}^3 \quad J_x = 4239 \text{ cm}^4$$

ed essendo per l'acciaio $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ la (A) diventa:

$$l' [P \cdot s + 2(F \cdot b + m''_1)] + l'' \cdot 2 m''_1 = 3\mu'' l'' + \frac{6\delta''}{l''} EJ$$

e quindi $4 [4 + 2(3 + m''_1)] + 5(2m''_1) =$

$$3 \cdot \frac{1}{12} 2 \cdot 5^2 + \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{5} 2,1 \cdot 10^7 \cdot 4239 \cdot 10^{-8} \quad (1) \quad (B)$$

risolvendo la (B) si ottiene:

$$40 + 18m''_1 = 62,5 + 21,4$$

$$m''_1 = 2,45 \text{ tm} \quad (C)$$

Il cedimento differenziale, sebbene apparentemente modesto, ha prodotto un incremento del momento flettente in B piuttosto notevole. Nella (C) infatti si può notare che il contributo dovuto al cedimento δ'' è 21,4 tm.

In assenza di cedimenti differenziali allora il momento in B sarebbe stato:

$$m''_1 = \frac{62,5 - 40}{18} = 1,25 \text{ tm}$$

Il cedimento δ'' ha fatto quindi aumentare il momento in B di 1,20 tm. Intuitivamente il fatto può essere interpretato come tendenza del tratto BC a trasformarsi in mensola per effetto del cedimento in C .

Si possono ora disegnare i diagrammi. Il diagramma del M_f avrà andamento lineare sullo sbalzo e in AB . In B il valore del M_f si determina tenendo presente l'equilibrio del nodo (fig. 6). Nel tratto BC la struttura può essere schematizzata come una trave su due appoggi, purché si riporti in B il momento di 2,45 t trasmesso dal resto della struttura (fig. 7). Si avrà allora:

$$R_1 = 2 \cdot 2,5 + \frac{2,45}{5} = 5,49 \text{ t}$$

$$R_2 = 2 \cdot 2,5 - \frac{2,45}{5} = 4,51 \text{ t}$$

La legge di variazione del taglio sarà allora:

$$T_x = 5,49 - 2x$$

e si annullerà per:

$$5,49 - 2x = 0$$

$$x = \frac{5,49}{2} = 2,74 \text{ (punto in cui è massimo il } M_l)$$

La legge di variazione del M_l è:

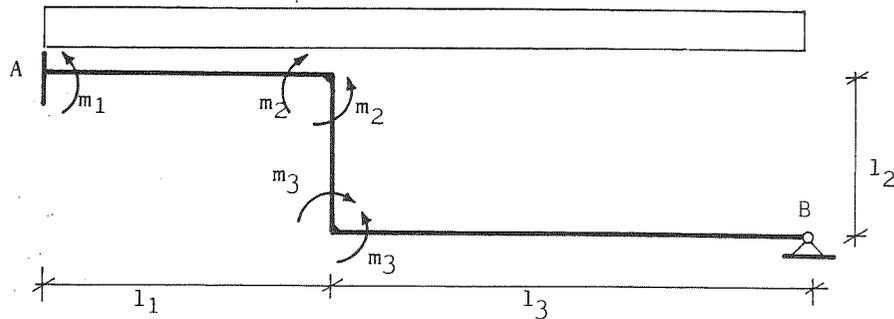
$$M_x = -2,45 + 5,49x - \frac{2x^2}{2}$$

e per $x = 2,74$ si ha:

$$M_{max} = -2,45 + 15 - 7,5 \approx 5 \text{ tm}$$

Esercizio 8

Risolvere il sistema in figura sollecitato da un carico ripartito p con l'equazione dei 4 momenti.



L'equazione dei 4 momenti permette di determinare i momenti incogniti agli estremi delle aste del sistema. Indicati i momenti incogniti come in figura si possono scrivere 3 equazioni dei 4 momenti per trovare i 3 momenti incogniti.

(1) Il modulo di elasticità E è stato espresso naturalmente nella (B) in t/m^2 $E = 2,1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} = 2,1 \cdot 10^7$ e lo stesso si è fatto per J_x espresso in m^4 .

Indicati i momenti incogniti come in figura si avrà allora:

1ª equazione: Tra il terreno e l'asta (1). Ricordando che il terreno ha rigidità infinita ($EJ = \infty$) si ha:

$$\omega_0 = \frac{l_0}{EJ} = 0 \text{ e quindi si ha:}$$

$$\omega_1 (2m_1 + m_2) = \frac{3pl_1^2}{12} \omega_1 + \frac{6\delta}{l_1} \text{ dove } \delta \text{ è l'abbassamento in } E.$$

2ª equazione: Tra l'asta (1) e l'asta (2):

$$\omega_1 (m_1 + 2m_2) + \omega_2 (2m_2 + m_3) = \omega_1 \left(3 \frac{pl_2^2}{12} - \frac{6\delta}{l_2} \right)$$

3ª equazione: Tra l'asta (2) e l'asta (3):

$$\omega_2 (m_2 + 2m_3) + \omega_3 (2m_3) = \omega_3 \frac{3pl_3^2}{12} - \frac{6\delta}{l_3}$$

Si hanno 3 equazioni in 4 incognite: la quarta incognita è infatti l'abbassamento δ . Si può però scrivere una quarta equazione di equilibrio alle forze verticali:

$$pl_1 + Q + pl_3 = R_a + R_b$$

ed esprimendo le reazioni R_a e R_b in funzione dei momenti si ha:

$$pl_1 + Q + pl_3 = \frac{pl_1}{2} + \frac{m_1 - m_2}{l_1} + \frac{pl_3}{2} - \frac{m_3}{l_3}$$

Esercizio 9

Determinare le reazioni vincolari della struttura iperstatica in figura utilizzando il teorema di Betti (1).

METODOLOGIA

- 1) Riconoscere il grado di iperstaticità del sistema.
- 2) Trasformare il sistema da iperstatico in isostatico (trovare il sistema ridotto), attraverso opportune degradazioni dei vincoli.
- 3) Mettere le relative incognite iperstatiche al posto dei vincoli degradati.

(1) V. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni*, vol. I, pag. 620.

Nell'esempio in esame la struttura è due volte iperstatica. Si può ridurla in isostatica in diversi modi, ad esempio declassando il vincolo di incastro in cerniera e la cerniera B in carrello. Le incognite iperstatiche da porre sono il momento d'incastro in A e la reazione orizzontale in B . Il verso è qualsiasi: se non è quello giusto la soluzione verrà negativa e il verso dovrà essere cambiato. Le forze esterne sono ora P , m , x . Per trovare le incognite m ed x bisogna calcolare lo spostamento del punto B e la rotazione della sezione in A (che sono funzione di tutte le forze esterne P , m , x) e imporre la condizione che spostamento in C e rotazione in A siano nulli. Infatti, attribuendo ad m ed x valori qualunque si avrà un certo spostamento δ_b e una certa rotazione γ_a , mentre dando l'effettivo valore della reazione δ_b e γ_a sono nulli.

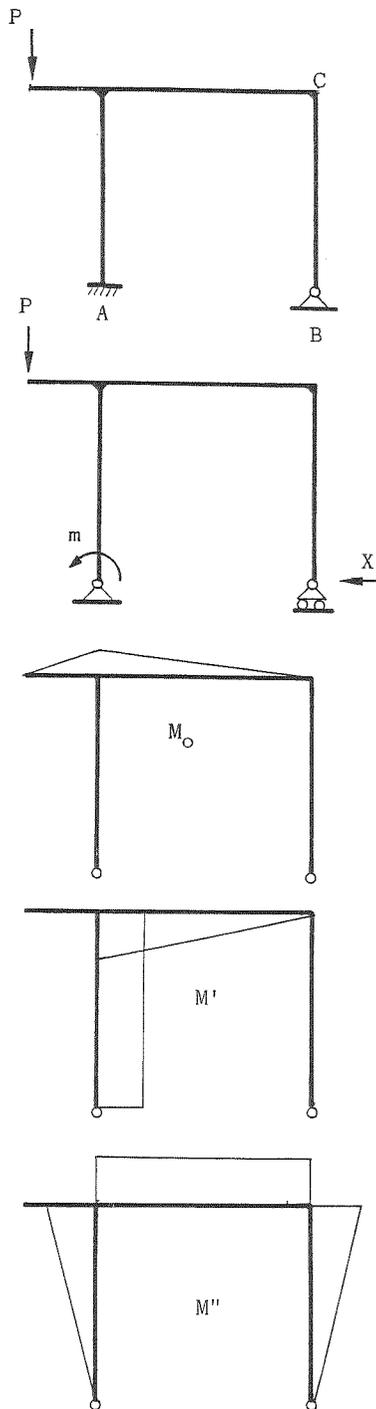
Queste condizioni forniscono le equazioni di congruenza o compatibilità.

$$\begin{cases} \delta_b(P, m, x) = 0 \\ \gamma_a(P, m, x) = 0 \end{cases}$$

Bisogna dunque per prima cosa trovare l'espressione degli spostamenti in funzione di P , m ed x . Col teorema di Betti si ha:

$$\begin{cases} \gamma_a = \int MM' d\omega + \sum NN'_c = 0 \\ \delta_b = \int MM'' d\omega + \sum NN''_c = 0 \end{cases} \quad 1)$$

dove i lavori compiuti dallo sforzo normale N si possono trascurare. M è il momento dovuto alle forze esterne, M' alla coppia unitaria in A e M'' alla forza unitaria in B . M è dunque la somma del momento dovuto a P , di quello dovuto ad m e ad x . Ma



il momento dovuto ad x sarà x volte maggiore del momento dovuto alla forza unitaria applicata in B :

$$M_x = + xM''$$

Il segno dipende dal verso della forza unitaria concorde con x . Così pure si avrà:

$$M_m = + mM'$$

Chiamando ora M_o il momento dovuto alle forze date (in questo caso la sola P) la relazione 1) si può esplicitare nella seguente, più comoda, forma:

$$\begin{cases} \curvearrowright \gamma_a = \int (M_o - mM' + xM'') M' d\omega = 0 \\ \leftarrow \delta_b = \int (M_o - mM' + xM'') M'' d\omega = 0 \end{cases} \quad 2)$$

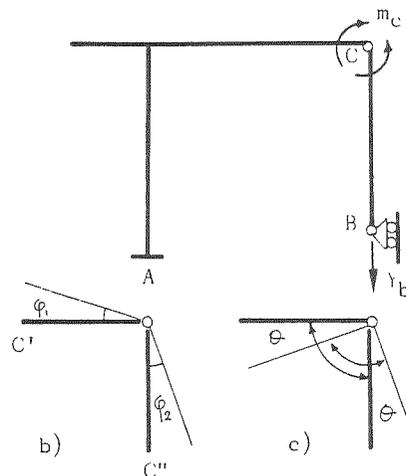
dove il segno negativo della quantità mM' dovuto alla diversità delle direzioni della coppia unitaria e dell'incognita m . Costruiti i diagrammi relativi a M_o , M' e M'' e trovata la legge di variazione dei momenti, sostituendo nella 2) si ottiene un sistema nelle sole incognite m ed x . I diagrammi di M_o , M' e M'' sono riportati in figura.

Naturalmente non è questo il solo modo di procedere. Si poteva ottenere ad esempio il sistema ridotto introducendo una sconnessione di primo tipo (cerniera al posto del vincolo di continuità) in C , e un carrello in B . In tal caso bisogna fare attenzione a non far coincidere la direzione della reazione del carrello con la congiungente BC , altrimenti il tratto BC risulterebbe labile per carichi orizzontali. Scelto il sistema equivalente in figura, le incognite iperstatiche saranno Y_b e il momento di continuità in C m_c . Il metodo da seguire è lo stesso del caso precedente: spostamento in B e rotazione relativa in C debbono essere nulli. Si intende per rotazione relativa la differenza tra le rotazioni di due parti. In fig. b) ad esempio le due aste sono vincolate a

cerniera e quindi possono ruotare formando tra di loro angoli non costanti. Rispetto alla posizione iniziale esse hanno compiuto due rotazioni φ_1 e φ_2 di segno contrario. La rotazione è in questo caso:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \text{ e quindi } \gamma_{C'C''} \neq 0$$

ed è quindi una rotazione relativa. In fig. c) invece non c'è cerniera ma vincolo di continuità. Le due aste perciò, pur potendo ruotare, debbono mantenere costante l'angolo tra loro compreso e non possono quindi compiere una rotazione assoluta θ (fig. c). Poiché nella struttura in esame abbiamo interrotto la continuità in C bisognerà imporre la



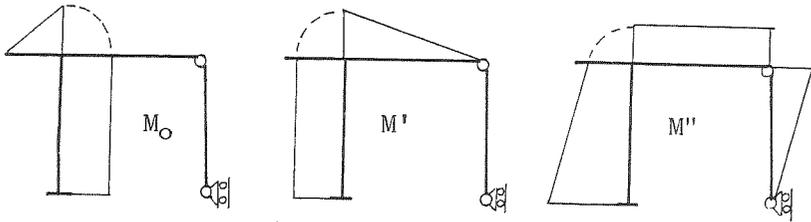
condizione che, a causa dei momenti m_c , non siano possibili rotazioni relative. Le equazioni di congruenza sono allora:

$$\begin{cases} \downarrow \delta_b (P, Y_b, m_c) = 0 \\ \curvearrowright \gamma C' C'' (P, Y_b, m_c) = 0 \end{cases}$$

e, applicando il teorema di Betti:

$$\begin{cases} \downarrow \delta_b = \int_s MM' d\omega = \frac{1}{EJ} \int_s (M_o + Y_b M' + m_c M'') M' ds = 0 \\ \curvearrowright \gamma C' C'' = \int_s MM'' d\omega = \frac{1}{EJ} \int_s (M_o + Y_b M' + m_c M'') M'' ds = 0 \end{cases}$$

dove M_o è il momento dovuto a P , M' alla forza unitaria in B nello stesso senso dello spostamento e M'' è il momento dovuto alle coppie unitarie poste in C nello stesso senso delle rotazioni relative. I diagrammi di M_o , M' e M'' sono quelli in figura.



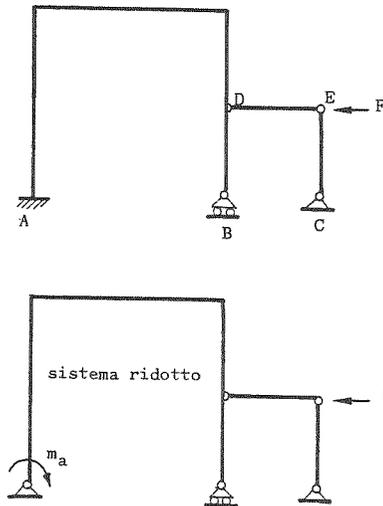
Esercizio 10

Trovare le incognite iperstatiche della struttura in figura.

Il sistema è una sola volta iperstatico e può essere reso isostatico degradando l'incastro in A in cerniera e introducendo un momento incognito m .

CONGRUENZA

La sezione all'incastro in A , svincolata mediante una cerniera nel sistema ridotto, è libera di ruotare. Il momento m deve allora essere tale da impedire le rotazioni della sezione in A e cioè:



$$\curvearrowright \gamma_a (F, m_a) = 0$$

$$\gamma_a = \int_s MM' d\omega = 0$$

dove M è il momento dovuto alle forze esterne m e F ed M' è il momento dovuto alla coppia unitaria applicata in A nello stesso verso della

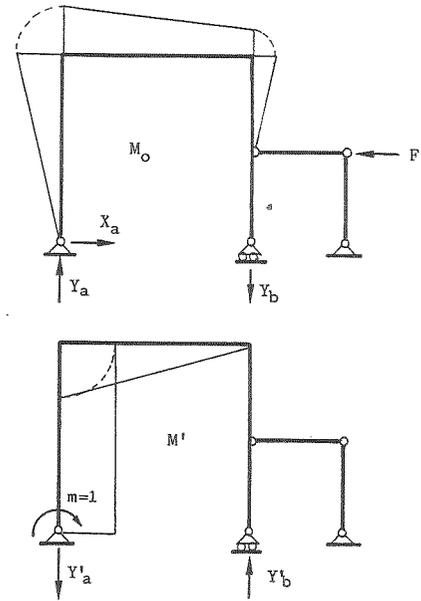
rotazione γ_a .

Si può esplicitare M come momento dovuto alla forza data F (che si indica con M_o) e all'incognita iperstatica m . Tenendo presente che il momento dovuto ad m è m volte più grande di quello della coppia unitaria M' , si può scrivere:

$$M = M_o + m M'$$

$$\gamma_a = \int_s (M_o M' + m M'^2) d\omega$$

Rimangono ora da disegnare i diagrammi di M_o ed M' , che hanno l'andamento in figura. Il tratto DEC , essendo per M_o caricata sul nodo E e per M' scarica, non ha momento flettente.



Esercizio 11

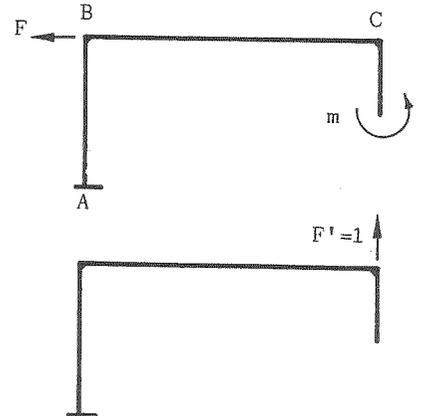
Calcolare lo spostamento verticale del punto C della mensola in figura per effetto della coppia m e della forza F .

Applichiamo, come sistema di forze ausiliario F' una forza unitaria in C . Per il teorema di Betti il lavoro di trascinato $F' \cdot \uparrow \delta_c$ compiuto dalla forza unitaria è:

$$1 \cdot \uparrow \delta_c = \int_s MM' d\omega \quad (1)$$

dove M è il momento dovuto alle forze date mentre M' è il momento dovuto alla forza unitaria.

Costruiti perciò i diagrammi M ed M' , si trova la legge di variazione nei vari tratti e si sostituisce nella quantità sotto il segno di integrale. L'integrazione va estesa (per tratti successivi quando la legge del momento non è esprimibile con una funzione unica) a tutta la struttura s .



(1) V. BELLUZZI, pag. 620 e seg.

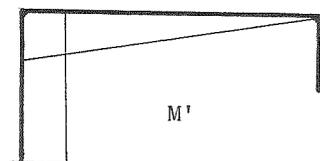
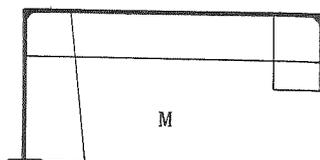
Ricordando che:

$$d\omega = \frac{ds}{EJ}$$

l'integrale sarà:

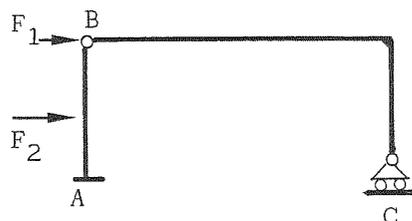
$$\delta_c = \frac{1}{EJ} \int_s MM' ds$$

essendo $\frac{1}{EJ}$ costante su ogni tratto di struttura.



Esercizio 12

Determinare nella struttura in figura lo spostamento del punto C per effetto delle forze F_1 e F_2 . La struttura è a sezione costante ($EJ = \text{cost.}$). Bisogna calcolare $\delta_c(F_1, F_2)$.



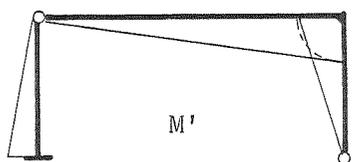
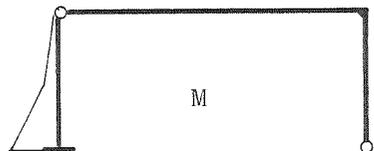
Applicando il teorema di Betti e trascurando il lavoro di trascinamento dovuto al taglio si ha:

$$1 \cdot \delta_c = \int_s MM' dw$$

dove $1 \cdot \delta_c$ in termini fisici, non è uno spostamento ma il lavoro compiuto dalla forza unitaria applicata in c per lo spostamento δ_c del punto C a causa delle forze date F_1 e F_2 . E' cioè il lavoro di trascinamento compiuto dalla forza $F' = 1$.

$$1 \cdot \delta_c = L_1$$

sfruttando tuttavia questa relazione si ricava δ_c . M è il diagramma dei momenti delle forze date mentre M' è quello dovuto al sistema ausiliario di forze $F' = 1$ costituito da una for-



(1) V. BELLUZZI, pag. 620 e seg.

za unitaria applicata in c. Essendo EJ costante l'integrazione diventa:

$$\delta_c = \frac{1}{EJ} \int_s MM' ds$$

Esercizio 13

Determinare lo sforzo nelle aste della struttura in figura.

Determinate le reazioni vincolari R_a ed R_b , si potrebbe costruire il Cremoniano degli sforzi se non ci fosse un'asta sovrabbondante (CD) che rende il sistema iperstatico. Per risolvere il sistema si deve quindi determinare lo sforzo nell'asta CD. Si determinano allora, col metodo dei nodi, gli sforzi nelle aste AE, AC, FB, DB, come in figura e si prende in esame la maglia iperstatica CEDF con i relativi sforzi trasmessi nei nodi CEDF (fig. b), e si applicano i metodi di risoluzione dei sistemi iperstatici. Reso il sistema isostatico operando un taglio in CD (fig. c), si introducono le incognite iperstatiche. In questo caso si tratta di due reazioni z uguali e contrarie. L'equazione di congruenza deve allora esprimere il fatto che gli spostamenti relativi nel punto K dove si è effettuato il taglio, devono essere nulli:

$$\delta_{KK'}(F', Z) = 0$$

Applicando il teorema di Betti (si hanno solo sforzi normali essendo la sollecitazione nodale):

$$\delta_{KK'} = \sum NN' = 0$$

ed essendo $N = N_o + ZN'$ si ha pure

$$\delta_{KK'} = \sum N_o N'_c + Z \sum N'^2_c = 0$$

e portando l'incognita Z fuori del segno di sommatoria:

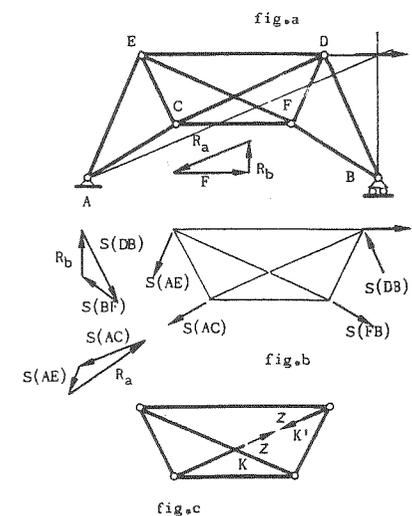
$$\sum N_o N'_c + Z \sum N'^2_c = 0$$

da cui:

$$Z = - \frac{\sum N_o N'_c}{\sum N'^2_c} \quad (1)$$

Il termine N_o indica lo sforzo normale nelle aste dovuto alle sollecitazioni date, N' lo sforzo nelle aste dovuto alla sollecitazione unitaria (fig. 3) e c la costante dell'asta:

$$c = \frac{l}{EA}$$



per cui i termini della (1) possono avere la forma:

$$\Sigma N_o N'_c = \Sigma N_o \frac{N'_l}{EA} = \Sigma N_o \cdot \delta'$$

$$\Sigma N'^2_c = \Sigma N' \frac{N'_l}{EA} = \Sigma N' \cdot \delta'$$

essendo $\delta' = \frac{N'_l}{EA}$ lo spostamento dovuto alla forza unitaria, il che indica che si tratta di un rapporto tra lavori (di trascinamento l'uno, diretto dall'altro).

Ottenuto ora il valore della sollecitazione nell'asta sovrabbondante, il problema si risolve con i metodi abituali della statica grafica.

Il metodo può essere usato per determinare lo sforzo in un numero qualsiasi di aste sovrabbondanti potendosi scrivere per ogni sforzo incognito una equazione del tipo della (1).

Esercizio 14

Risolvere il sistema in fig. 1).

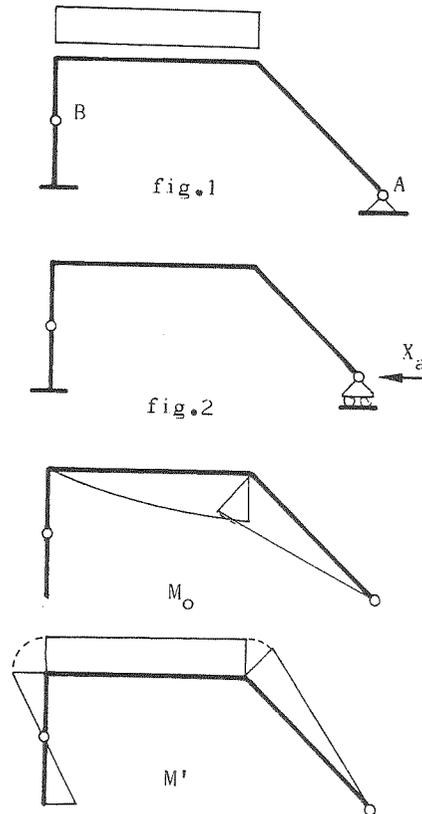
Svincolato il sistema come in fig. 2) si può scrivere l'unica equazione di congruenza:

$$\begin{aligned} \leftarrow \delta_a(P, X_a) &= 0 \\ \int_s MM' d\omega &= 0 \\ M &= M_o + X_a M' \end{aligned}$$

l'equazione che risolve il sistema è quindi:

$$\int_s (M_o M' + X_a M'^2) d\omega = 0$$

I diagrammi di M_o e M' sono riportati in figura.



Esercizio 15

Risolvere il sistema in fig. 3).

Il sistema è 2 volte iperstatico e può essere reso isostatico come in fig. 4). Le due equazioni di congruenza saranno allora:

$$\begin{cases} \rightarrow \delta_a(P, X_a, m_b) = 0 \\ \curvearrowright \gamma_b(P, X_a, m_b) = 0 \end{cases}$$

e applicando il teorema di Betti:

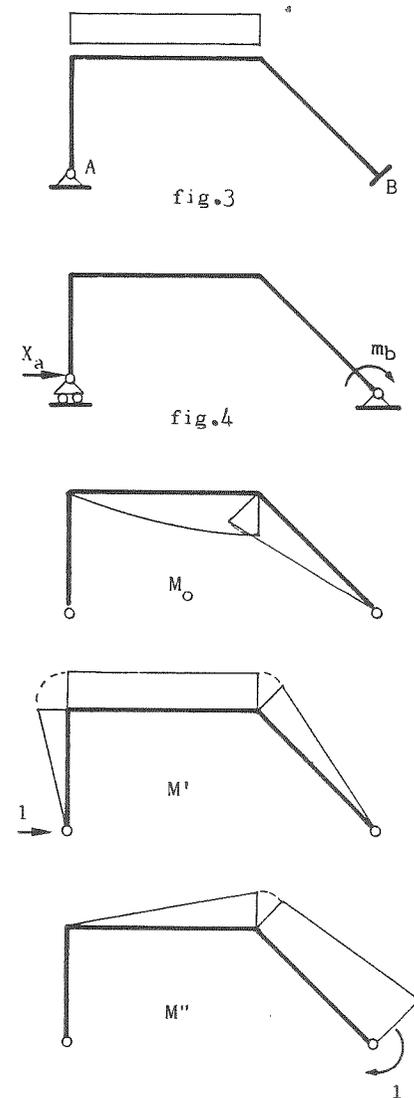
$$\begin{aligned} \int_s MM' d\omega &= 0 \\ \int_s MM'' d\omega &= 0 \end{aligned}$$

dove M , momento dovuto alle forze esterne (note e incognite), vale:

$$M = M_o + X_a M' + m_b M''$$

I diagrammi di M_o , M' e M'' sono riportati in figura.

M_o è il momento dovuto ai carichi noti (P), mentre M' è dovuto alla forza unitaria applicata in A e M'' alla coppia unitaria applicata in B .



Esercizio 16

Risolvere il sistema in fig. 1). Il sistema è isostatico per vincoli esterni (incernierato e appoggiato), ma essendo un sistema chiuso, è tre volte iperstatico per vincoli interni. Il sistema principale può essere ottenuto interrompendo la continuità nel punto c distante $l/2$ da A e B . Le equazioni di congruenza, una volta introdotte le incognite iperstatiche Y_c , X_c e M_c , dovranno esprimere le condizioni che spostamenti relativi (orizzontali e verticali) e rotazioni relative, siano nulle in C .

Essendo però la struttura simmetrica rispetto a C , in tale punto il taglio è nullo, cioè si ha la condizione:

$$Y_c = 0$$

sicché le incognite iperstatiche si riducono alle sole X_c ed M_c .

Le equazioni di congruenza saranno perciò:

$$\begin{cases} \delta_c(P, M_c, X_c) = \int_s MM' d\omega = 0 \\ \text{(spostam. orizzont. relativi nulli)} \\ \gamma_c(P, M_c, X_c) = \int_s MM'' d\omega = 0 \\ \text{(rotazioni relative nulle)} \end{cases}$$

ed essendo

$$M = M_o + X_c M' + M_c M''$$

si ha:

$$\begin{aligned} \delta_c &= \int_s (M_o M' + X_c M'^2 + M_c M' M'') d\omega = 0 \\ \gamma_c &= \int_s (M_o M'' + X_c M' M'' + M_c M''^2) d\omega = 0 \end{aligned}$$

che sono le equazioni che danno le incognite iperstatiche. I diagrammi di M' (dovuto alle forze unitarie applicate in C) e di M'' (dovuto alle coppie unitarie applicate in C) e di M_o (dovuto al carico p) sono riportati in figura.

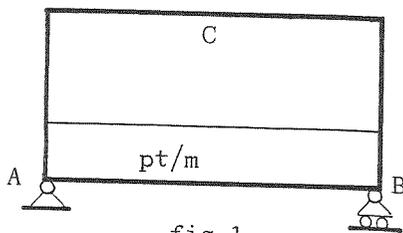


fig.1

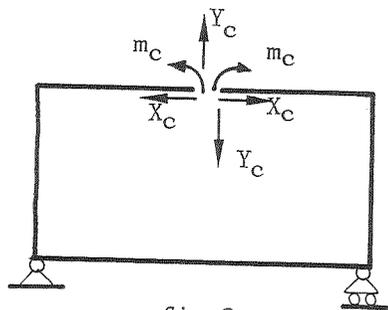
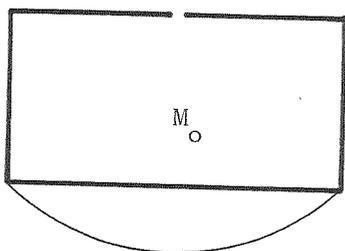
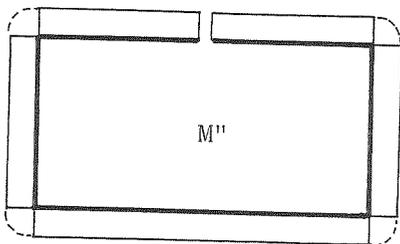
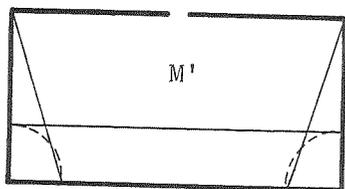


fig.2



Esercizio 17

Trovare le incognite iperstatiche del sistema in figura.

Il sistema è una volta iperstatico per vincoli esterni e una per vincoli interni. Può essere reso isostatico sostituendo una cerniera in B e togliendo l'asta CD . In B bisognerà introdurre una coppia di braccio nullo z , che sostituisca le azioni mutue che l'asta CD e il resto della struttura si trasmettono. Tali forze z , uguali e contrarie, si applicano poi sull'asta CD isolata, con segno opposto, e rappresentano le azioni che la struttura trasmette sull'asta.

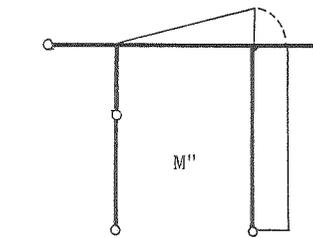
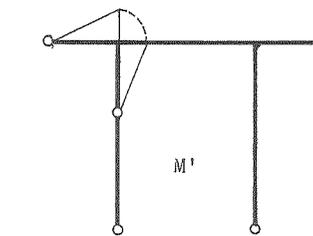
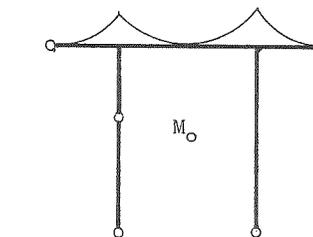
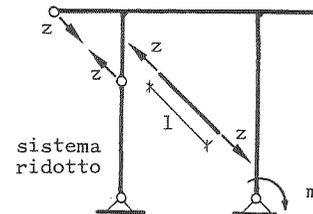
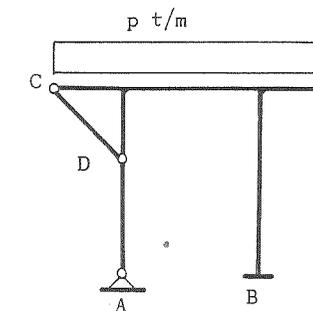
CONGRUENZA

Gli spostamenti relativi di C e D debbono essere congruenti con la deformazione dell'asta. Se cioè l'asta si accorcia, C e D si avvicineranno di una lunghezza pari allo accorciamento dell'asta. La struttura poi non deve ruotare in B . Le due equazioni sono allora:

$$\begin{cases} \delta_{CD}(p, m, z) = -\frac{zl}{EA} \quad (1) \\ \gamma_A(p, m, z) = 0 \end{cases}$$

(1) Questa uguaglianza esprime il fatto che l'avvicinamento di C a D sulla struttura (dovuto a z , p ed m) è uguale all'accorciamento sull'asta dovuto alla sola forza z , e cioè:

$\delta_{CD}(p, m, z) = \delta_{CD}(z)$
Secondo la posizione delle forze in figura l'accorciamento $\delta_{CD}(z)$ è negativo e vale $-z l / EA$.



e applicando il teorema di Betti:

$$\begin{cases} \delta CD = \int_s MM' d\omega = -\frac{zl}{EA} \\ \gamma A = \int_s MM'' d\omega = 0 \end{cases}$$

dove M' è il momento dovuto alle forze unitarie applicate in C e D nello stesso senso dello spostamento relativo δCD , e M'' è dovuto alla coppia unitaria in B . M , dovuto a tutte le forze esterne, si può esprimere in:

$$M = M_o + zM' + mM''$$

L'andamento dei relativi diagrammi è riportato nelle figure (vedi pagina precedente).

Esercizio 18

Reazioni vincolari del portale iperstatico in figura.

Il portale è chiaramente due volte iperstatico e la sua soluzione può essere impostata in uno dei modi seguenti:

1) trasformando la struttura in un arco a 3 cerniere e introducendo i momenti d'incastro incogniti m_a e m_f . Le equazioni di congruenza sono in tal caso:

$$\begin{cases} \gamma A(P, m_a, m_f) = 0 \\ \gamma F(P, m_a, m_f) = 0 \end{cases}$$

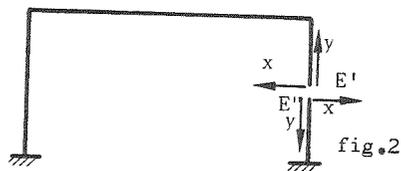
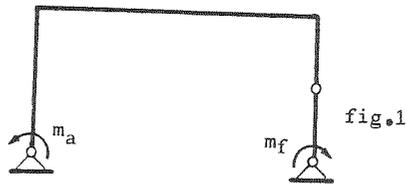
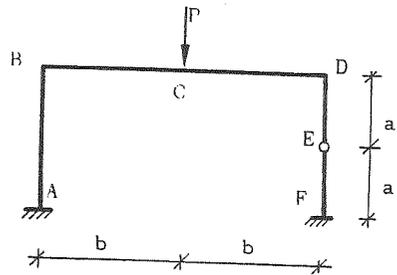
(v. schema in fig. 1)

2) togliendo la cerniera in E e lasciando staccate le due mensole $ABDE$ e FE (vedi fig. 2). Poiché E ed E' debbono avere gli stessi spostamenti orizzontali e verticali, le equazioni si possono scrivere:

$$\begin{cases} \delta E'(Pxy) = \delta E''(xy) \\ \delta E'(Pxy) = \delta E''(xy) \end{cases}$$

Tali equazioni, scritte tenendo presente l'uguaglianza degli spostamenti assoluti, si possono scrivere anche come uguaglianza a zero degli spostamenti relativi tra E ed E' :

$$\begin{cases} \delta E'E''(P, x, y) = 0 \\ \delta E'E''(P, x, y) = 0 \end{cases}$$



3) introducendo una cerniera in B e in D (fig. 3).

Lo schema diventa quello di un arco a 3 cerniere (BDE) impostato su due mensole (AB ed EF). Le equazioni di congruenza debbono allora esprimere il fatto che non ci sono rotazioni relative tra le sezioni B e B' e D e D' , cioè:

$$\begin{cases} \gamma BB'(m_1, m_2, P) = 0 \\ \gamma DD'(m_1, m_2, P) = 0 \end{cases}$$

4) sostituendo l'incastro in F con un carrello.

In questo caso bisogna fare attenzione che la direzione della reazione del carrello non coincida con quella del pendolo EF . In tal caso infatti il sistema sarebbe labile (fig. 4a). Una posizione corretta del carrello è quella in fig. 4b. Le incognite iperstatiche sono allora y ed m e le equazioni di congruenza sono:

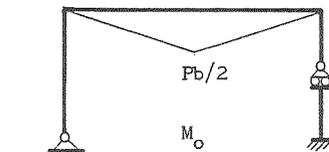
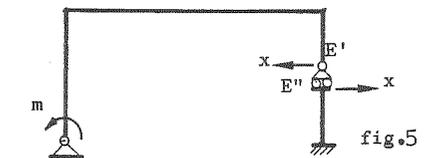
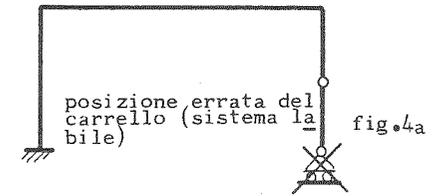
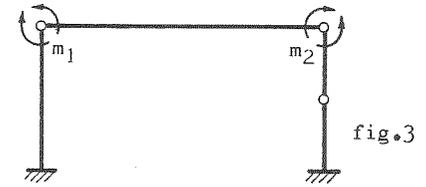
$$\begin{cases} \delta F(P, y, m) = 0 \\ \gamma F(P, y, m) = 0 \end{cases}$$

5) degradando a cerniera l'incastro in A e a carrello la cerniera in E e introducendo in A il momento incognito m e in E le azioni mutue orizzontali x che le due parti di struttura ABE ed EF si trasmettono. Le equazioni di congruenza esprimeranno ora il fatto che sono nulle le rotazioni in A e gli spostamenti

relativi $\delta E'E''$ in E .

$$\begin{cases} \gamma A(p, m, x) = 0 \\ \delta E'E''(p, m, x) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione poteva essere scritta anche tenendo presente che, perché gli spostamenti del punto E siano congruenti, lo spostamento di E' del carrello deve essere uguale (in valore e direzione) allo spostamento di E'' della base di appoggio (il che è una



forma diversa per dire che gli spostamenti relativi in E sono nulli) e cioè:

$$\overleftarrow{\delta E'}(p, m, x) = \overrightarrow{\delta E''}(x)$$

Si noti che mentre lo spostamento di E' è dovuto al carico P , al momento incognito m e alla forza incognita x , lo spostamento di E'' è dovuto solo a x .

Sviluppiamo ora (tra i vari modi di soluzione impostati) l'ultimo, applicando il teorema di Betti:

$$\overleftarrow{\gamma} A(p, m, x) = \int_s MM' d\omega = 0$$

$$\overrightarrow{\delta} E'E''(p, m, x) = \int_s MM'' d\omega = 0 \quad (A)$$

dove si ha:

$$M(p, m, x) = M_o \pm m_1(M') \pm x(M'') \quad (B)$$

ed essendo come al solito M_o il momento dovuto alla forza nota P , M' alla coppia unitaria in A e M'' alle forze unitarie in E . L'indeterminatezza del segno di M' e M'' nell'uguaglianza (B) dipende dal verso (concorde o discorde con quello di m e x) della coppia e delle forze unitarie. Assumiamo versi concordi in modo che si abbia, sostituendo la (B) (ora senza indeterminazione nei segni) nella prima delle (A):

$$\overleftarrow{\gamma} A = \int_s MM' d\omega = \int_s (M_o + mM' + xM'') d\omega$$

ed essendo la sezione costante in tutta la struttura (cioè EJ costante):

$$\overleftarrow{\gamma} A = \int_s MM' \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} (\int_s M_o M' dx + m_1 \int_s M'^2 dx + x \int_s M' M'' dx) = 0$$

e naturalmente, essendo l'uguaglianza a zero, $\frac{1}{EJ}$ va tolto.

$$\text{Si ponga ora per comodità } \begin{cases} \int_s M_o M' dx = A \\ \int_s M'^2 dx = B \\ \int_s M' M'' dx = C \end{cases} \quad (C)$$

per cui la prima equazione delle (A) diventa $\overleftarrow{\gamma} A = A + m_1 B + xC = 0$

Con ragionamento analogo si sviluppa la seconda delle (A):

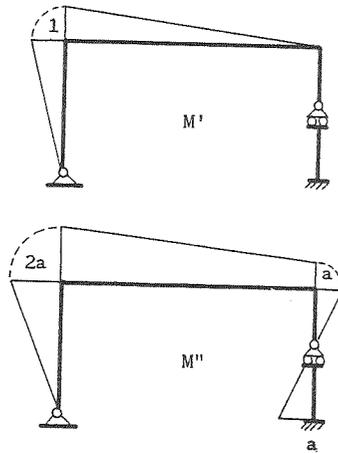
$$\overleftrightarrow{\delta} E'E'' = \int_s (M_o + mM' + xM') M'' dx = 0$$

$$\int_s M_o M'' dx + m \int_s M' M'' dx + x \int_s M''^2 dx = 0$$

e ponendo:

$$\int_s M_o M'' dx = D; \quad \int_s M''^2 dx = E \quad (D)$$

si ottiene $\overleftrightarrow{\delta} E'E'' = D + mC + xE = 0$



e quindi le due equazioni in due incognite risultano ora:

$$A + mB + xC = 0 \quad D + mC + xE = 0$$

Si tratta ora di trovare il valore dei termini noti A, B, C, D, E , dati dagli integrali (C) e (D). Tali integrali vanno estesi a tutta la struttura, e non essendo esprimibili la legge di variazione del momento flettente su tutta la struttura con una funzione unica, gli integrali si risolveranno come somma di integrazioni parziali, come nelle tabelle seguenti, che possono essere compilate una volta trovato l'andamento dei diagrammi dei momenti M_o, M', M'' come in figura. Calcoliamo ad esempio il valore di A (1):

LEGGE DI VARIAZIONE DEI MOMENTI

tratto	x	M_o	M_1	$M_o M'$
$B-C$	$0 \leq x \leq b$	$\frac{Px}{2}$	$-1 + \frac{x}{2b}$	$\frac{P}{2} x \frac{x}{2b} - 1$
$C-D$	$0 \leq x \leq b$	$\frac{P}{2}(b-x)$	$\frac{x-b}{2b}$	$\frac{P}{2}(b-x) \frac{x-b}{2b}$

In base alla tabella l'integrale $\int_s M_o M' dx = A$ esteso a tutta la struttura va scritto come somma di integrazioni parziali nei tratti BC e CD . Negli altri tratti il prodotto $M_o M'$ è nullo.

$$A = \int_s M_o M' dx = \int_b^c M_o M' dx + \int_c^d M_o M' dx$$

$$A = \int_0^b \left(\frac{Px^2}{4b} - \frac{Px}{2} \right) dx + \int_0^b \left(\frac{Px}{2} - \frac{Pb}{4} - \frac{Px^2}{4b} \right) dx \text{ ed essendo } b = 3$$

$$A = \left[\frac{Px^3}{12b} - \frac{Pb}{4} x - \frac{Px^3}{12b} \right]^3 = \left[-\frac{Pb}{4} x \right]^3 = -\frac{3Pb}{4} \left[A = -\frac{9}{4} P \right]$$

Si ricava ora $B = \int_s M'^2 dx$, che può essere espresso mediante funzione negli intervalli AB e BD e quindi l'integrazione sarà:

$$B = \int_s M'^2 dx = \int_a^b M'^2 dx + \int_b^d M'^2 dx$$

con uguale procedimento poi si ricavano C, D ed E , i cui valori, sostituiti nella (D) danno le equazioni risolutive in m ed x .

(1) Si ricordi che i momenti positivi vengono disegnati nella parte inferiore (fibre tese) delle parti orizzontali di struttura e quindi in questi casi bisogna cambiare di segno alla funzione ricavata dal diagramma. Ad esempio nel caso della legge di variazione di M_o nel tratto BC , assunto come asse delle ascisse la retta per BD e come origine il punto B , la funzione della retta uscente da B e delimitante il diagramma in BC sarebbe $-\frac{P}{2} x$, ma essendo tali momento positivi sarà $\frac{P}{2} x$.

Esercizio 19

Trovare gli sforzi nelle aste CC' e BB' del sistema in figura a).

Svincolato il sistema (due volte iperstatico per vincoli interni) come in figura b) si possono scrivere le equazioni di congruenza:

$$\begin{cases} \delta BB' (P, Z_b, Z_c) = -\frac{Z_b \cdot l_1}{EA} \\ \delta CC' (P, Z_b, Z_c) = -\frac{Z_c \cdot l_2}{EA} \end{cases}$$

e applicando il teorema di Betti:

$$\begin{cases} \int_s MM' d\omega = -\frac{Z_b \cdot l_1}{EA} \\ \int_s MM'' d\omega = -\frac{Z_c \cdot l_2}{EA} \end{cases}$$

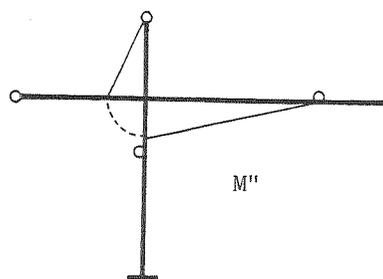
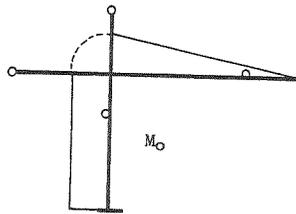
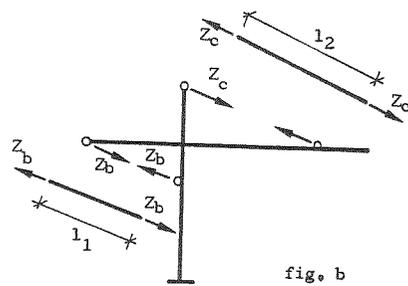
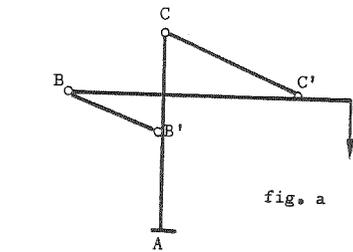
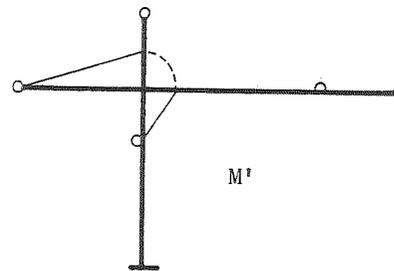
dove M' è il momento dovuto alle forze unitarie applicate in B e B' nel verso di Z_b e M'' dovuto alle forze unitarie applicate in C nel verso di Z_c .

Esplicitando M si avrà poi:

$$M = M_0 + Z_b M' + Z_c M''$$

da cui:

$$\begin{cases} \int_s M_0 M' + Z_b M'^2 + Z_c M' M'' = \frac{Z_b \cdot l_1}{EA} \\ \int_s M_0 M'' + Z_b M' M'' + Z_c M''^2 = \frac{Z_c \cdot l_2}{EA} \end{cases}$$



Esercizio 20

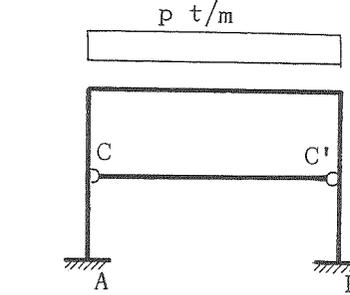
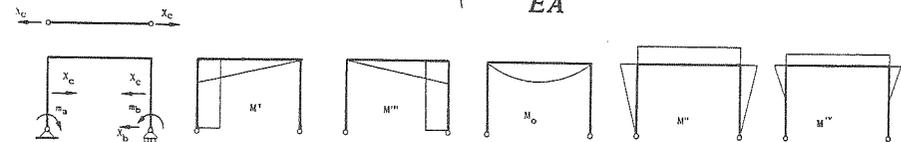


fig. a

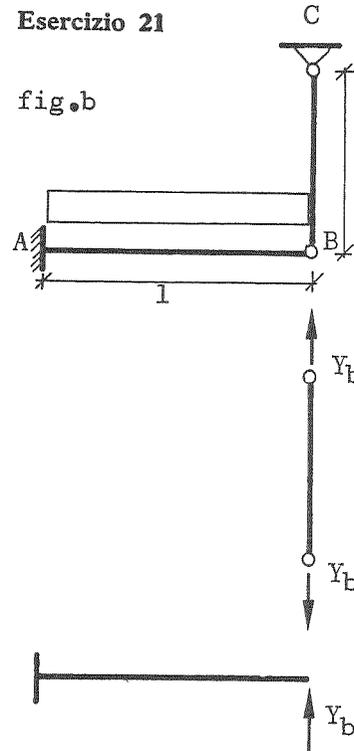


Risolvere il sistema 4 volte iperstatico in figura a):

$$\begin{cases} \gamma A \\ (P, X_b, X_c, M_a, M_b) = \int_s MM' d\omega = 0 \\ \delta B \\ (P, X_b, X_c, M_a, M_b) = \int_s MM'' d\omega = 0 \\ \gamma B \\ (P, X_b, X_c, M_a, M_b) = \int_s MM''' d\omega = 0 \\ \delta CC' \\ (P, X_b, X_c, M_a, M_b) = \int_s MM'''' d\omega = 0 \\ -\frac{X_c l}{EA} \end{cases}$$

Esercizio 21

fig. b



Risolvere il sistema 1 volta iperstatico in figura b).

Tolta l'asta BC e introdotta l'incognita Y_b si può scrivere l'equaz. di congruenza

$$\delta BC (P, Y_b) = \frac{Y_b \cdot h}{EA}$$

oppure (poiché C non si sposta):

$$\delta B (P, Y_b) = \frac{Y_b \cdot h}{EA}$$

e applicando Betti:

$$\int_s MM' d\omega = \frac{Y_b \cdot h}{EA}$$

dove la quantità al primo membro rappresenta l'abbassamento massimo δ_b di una mensola caricata con carico uniforme p e concentrato Y_b . Si ha quindi (facendo a meno di sviluppare l'integrale al primo membro):

$$\frac{Pl^3}{8EJ} - \frac{Y_b l^3}{3EJ} = \frac{EA}{Y_b h}$$

Esercizio 22

Si domanda che valore deve avere la forza F perché il punto B della struttura in figura si abbassi di 2 cm.

Contrariamente al solito questa volta l'incognita è il carico mentre l'abbassamento è noto.

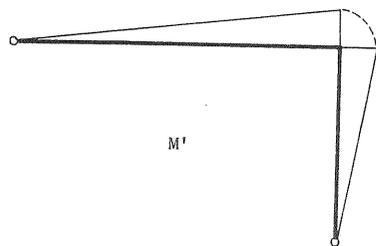
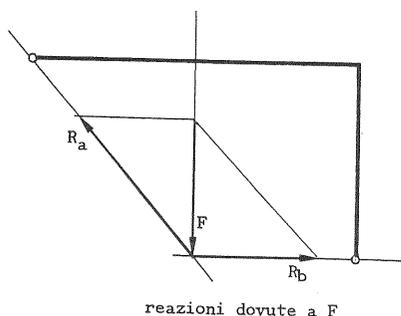
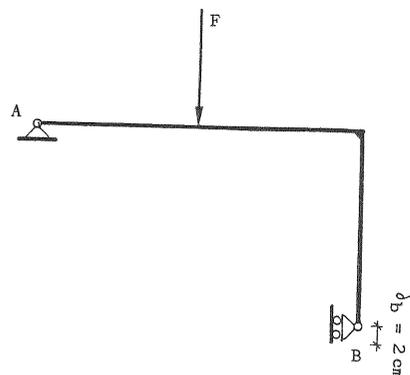
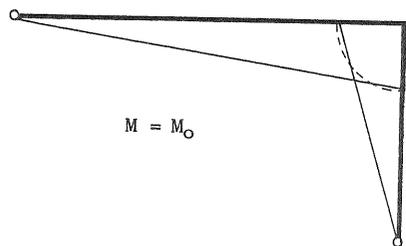
Tuttavia il metodo da usare è lo stesso: l'abbassamento $\downarrow \delta_b$ (teorema di Betti) è dato dalla formula:

$$\downarrow \delta_b(F) = \int_s MM' d\omega$$

ed essendo $\downarrow \delta_b(F)$ un dato del problema potremo anche scrivere:

$$\int_s MM' d\omega = 2 \text{ cm}$$

$M = M_0$ è il momento dovuto ad F , mentre M' è dovuto alla forza unitaria applicata in B nella direzione dello spostamento. Tracciati i diagrammi dei momenti M e M' (fig. 2 e 3), l'unica incognita che compare è F ; si arriva cioè a un'equazione in una sola incognita che dà la soluzione del problema.



Esercizio 23

Data la struttura in figura caricata in C con una forza di 20 tonnellate si richiede:

- dimensionare le sezioni delle aste BC (tirante) e AC (puntone);
- calcolare l'abbassamento del punto C .

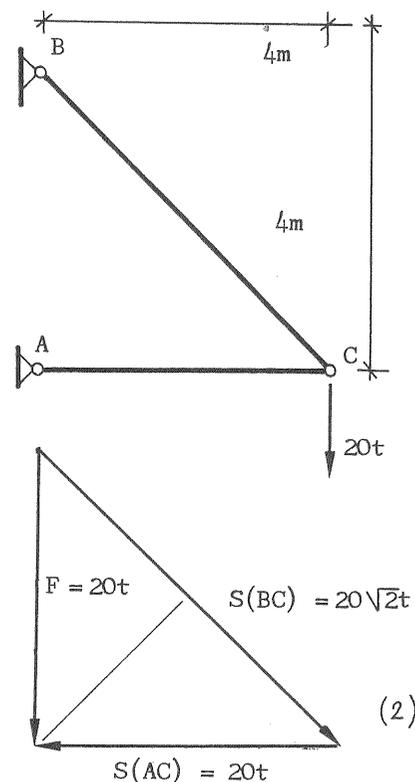
a) Risolvendo graficamente il sistema (fig. 2) si trova che lo sforzo di trazione in BC è pari a $20\sqrt{2}$ tonn. e quello di compressione in AC è 20 tonn.

Il dimensionamento della sezione di BC va fatto riferendosi alla nota formula $\sigma = N/A$ da cui, facendo lavorare l'acciaio alla massima tensione ammissibile (σ_0):

$$A_{(bc)} = \frac{S_{(bc)}}{\sigma_0} = \frac{20\sqrt{2} \text{ t}}{1400 \text{ kg/cm}^2}$$

$$A_{(bc)} = \frac{28.200}{1.400} = 20 \text{ cm}^2$$

Basta allora che il tirante BC abbia una area di 20 cm^2 , il che può essere ottenuto con infinite combinazioni di profilati (ad esempio usando 2 profilati ad L a lati disuguali $50 \times 75 \times 9$, ciascuno con un'area pari a $10,5 \text{ cm}^2$). Si noti che, non intervenendo nella formula del dimensionamento altri elementi relativi al profilato, oltre l'area, la forma della sezione sarà dettata unicamente da ragioni costruttive, contrariamente a quanto avviene per i puntoni, dove la forma della sezione è derivata da criteri di stabilità. Nel dimensionare AC ci preoccuperemo infatti di utilizzare un profilato che resista bene al carico di punta (1), che cioè presenti resistenza allo sbandamento uguale (o quasi) in tutte le direzioni. L'ideale sarebbe una sezione circolare (ellisse centrale d'inertza circolare), ma le ragioni che ne sconsigliano l'impiego in casi come questo sono di ordine costruttivo (difficoltà del collegamento con BC). Si possono allora usare profilati Differdange i quali hanno la caratteristica di avere un giratore minimo di valore non molto dissimile da quello massimo. La formula da usare stavolta deve tenere presente che l'asta può cedere per collasso della sezione o per sbandamento sul



(1) V. O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, pag. 474 e seg.

piano di minore resistenza della sezione (dove cioè il giratore è minimo). La formula di verifica è:

$$\frac{N\omega}{A} \leq \sigma_0 \text{ (metodo } \omega)$$

oppure l'equivalente:

$$\frac{N}{A\alpha} \leq \sigma_0$$

dove $\omega = \frac{1}{\alpha}$ è un termine correttivo maggiore di uno (cioè fa aumentare il carico reale N) dipendente dalla snellezza λ dell'asta. Si ricorda che per snellezza si intende il rapporto:

$$\lambda = \frac{\rho_{min}}{l_0}$$

tra la lunghezza libera di inflessione l_0 e il giratore minimo ρ_{min} . Essa allora sarà tanto maggiore quanto meno l'asta è in grado di resistere allo sbandamento.

E' chiaro allora che ω (od α) è noto quando è noto il profilato da usare, il che significa che la formula $\frac{N\omega}{A} = \sigma_0$ questa volta (a differenza del caso della trazione), non può essere usata anche come formula di progetto.

Bisogna allora procedere per tentativi. Poniamo dapprima, come tentativo, una snellezza media $\lambda = 100$:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}} = 100$$

$$\frac{400}{\rho_{min}} = 100 \text{ da cui } \rho_{min} = 4 \text{ cm.}$$

Cerchiamo su un manuale un profilato Differdange che abbia $\rho_{min} = 4$ (sul Manuale dell'ingegnere troviamo, invece di ρ_{min} , i_y) e cioè un IP 16.

Possiamo registrare questi dati, per comodità, in una tabella come in figura.

IP	ρ_{min} (i_y)	λ	A	α	σ
16	4	100	58,4	0,42	820
14	3,5	115	44,1	0,32	1400

Sempre dal manuale sappiamo che l'area è di 18,4 cm² e che $\alpha = 0,42$ (per $\lambda = 100$). Possiamo allora ricavare:

$$\sigma = \frac{N}{A\alpha} = \frac{20.000}{58,4 \cdot 0,42} ; \sigma = 820 \text{ kg/cm}^2$$

La tensione risulta accettabile senz'altro, ma troppo bassa rispetto alla massima alla quale il materiale potrebbe lavorare ($\sigma_0 = 1400 \text{ kg/cm}^2$). Proviamo allora ad usare un profilato più piccolo (IP 14), avente $A = 44,1 \text{ cm}^2$ e $\rho_{min} = 3,5 \text{ cm}$. Troviamo allora che la snellezza è:

$$\lambda = \frac{400}{3,5} = 115 \text{ da cui (dal manuale) } \alpha = 0,32$$

e quindi:

$$\sigma = \frac{N}{A\alpha} = \frac{20.000}{44,1 \cdot 0,32} ; \sigma = 1400$$

Allora tale profilato va sicuramente bene in quanto è il minimo usabile per rimanere in condizioni di sicurezza.

b) Si può calcolare l'abbassamento di C con Betti:

$$\downarrow \delta_c = \sum N_k N'_k C_k$$

$$\downarrow \delta_c = N_{(ac)} N'_{(ac)} \cdot C_{(ac)} + N_{(bc)} N'_{(bc)} \cdot C_{(bc)}$$

dove N è lo sforzo normale dovuto a F , N' lo sforzo dovuto alla forza unitaria applicata in C nella direzione dello spostamento, e C è la costante elastica dell'asta l/EA .

Avremo allora:

$$N_{(ac)} = 20.000 \text{ kg} \quad N_{(bc)} = 28.200$$

$$N'_{(ac)} = 1 \quad N'_{(bc)} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7$$

$$C_{(ac)} = \frac{400}{2.000.000 \cdot 44} \quad C_{(bc)} = \frac{570}{2.000.000 \cdot 20}$$

e sostituendo nell'espressione che da gli abbassamenti:

$$\downarrow \delta_c = 0,37 \text{ cm}$$

Allo stesso risultato si può giungere considerando che il lavoro esterno compiuto dalla forza F deve essere uguale alla somma dei lavori interni.

$$\frac{1}{2} F \cdot \downarrow \delta_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2_{(ab)} \cdot l_{(ab)}}{EA_{(ab)}} + \frac{N^2_{(bc)} \cdot l_{(bc)}}{EA_{(bc)}}$$

(Si noti che questa uguaglianza si può applicare per trovare lo spostamento solo quando direzione della forza esterna e direzione dello spostamento cercato coincidono).

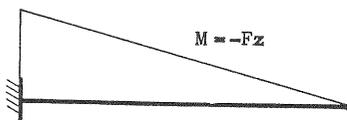
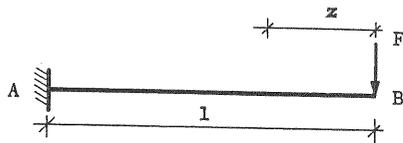
Esercizio 24

Calcolare, usando il teorema di Castigliano, l'abbassamento dello estremo B di una mensola caricata con una forza F come in figura.

Il teorema di Castigliano (1) afferma che la derivata parziale del lavoro di un sistema rispetto a una forza, è uguale allo spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa.

Per calcolare l'abbassamento di B calcoleremo allora il lavoro compiuto dal sistema e lo deriveremo rispetto alla forza F .

$$\downarrow \delta_b = \frac{dL}{dF}$$



Lo spostamento da calcolare è infatti proprio quello del punto di applicazione di F e nella direzione di F . Il lavoro compiuto dal sistema (dovuto esclusivamente alla sollecitazione di momento flettente, poiché si trascura il contributo dovuto a taglio) è (2):

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dz}{EJ}$$

L'espressione del momento M è:

$$M = -Fz$$

da cui possiamo scrivere:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2 z^2}{EJ} dz$$

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{F^2 z^3}{3EJ} \right]_0^l$$

$$L = \frac{F^2 l^3}{6EJ}$$

Per trovare l'abbassamento deriviamo rispetto ad F :

$$\frac{dL}{dF} = \frac{F l^3}{3EJ} \text{ che è lo spostamento cercato}$$

Tale spostamento era stato già calcolato precedentemente (pag. 82) utilizzando la teoria della linea elastica.

(1) V. O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, Vol. I, pag. 642.

(2) V. O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, Vol. I, pag. 180.

Utilizzando invece il teorema di Betti avremmo potuto scrivere:

$$\downarrow \delta_b (F) = \int_0^l M M' d\omega$$

in cui M è il momento flettente dovuto a tutte le forze esterne (in questo caso la forza nota F) e M' il momento dovuto alla forza unitaria applicata in B nella direzione di F .

Si ha quindi:

$$M = -Fz$$

$$M' = -1 \cdot z$$

$$\downarrow \delta_b (F) = \int_0^l F z^2 d\omega$$

ed essendo $d\omega = \frac{dz}{EJ}$

$$\downarrow \delta_b (F) = \int_0^l \frac{F z^2}{EJ} dz$$

$$\downarrow \delta_b (F) = \frac{F l^3}{3EJ}$$

che conferma i risultati trovati.

Esercizio 25

Calcolare l'abbassamento del punto C della struttura in figura usando il teorema di Castigliano, sapendo che l'angolo α è di 60° , e che le aste hanno uguale sezione e uguale modulo di elasticità E .

Dall'equazione di equilibrio delle componenti verticali delle forze sappiamo che:

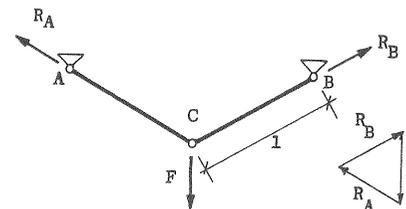
$$\Sigma Y = 0$$

e cioè (essendo per simmetria $R_A = R_B$):

$$F = 2 R_A \cos \alpha$$

ed essendo $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

$$R_A = F = R_B$$



Ricordando che in un'asta sollecitata a solo sforzo assiale N il lavoro vale:

$$L = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} \quad (1) \text{ avremo } L = \frac{F^2 l}{EA}$$

per cui lo spostamento verticale del punto C (che è nella direzione della forza F) sarà:

$$\downarrow \delta_c(F) = \frac{dL}{dF} \quad \downarrow \delta_c(F) = 2 \frac{Fl}{EA}$$

Utilizzando il teorema di Betti avremmo potuto scrivere:

$$\downarrow \delta_c(F) = \Sigma NN'c$$

dove $c = l/EA$:

$$\downarrow \delta_c(F) = F \cdot l \cdot c + F \cdot l \cdot c$$

$$\downarrow \delta_c(F) = 2 \frac{Fl}{EA}$$

Esercizio 26

Usando il teorema di Castigliano determinare l'avvicinamento dei punti A e D della struttura in figura, supponendo che le caratteristiche geometriche della sezione e il modulo di elasticità siano costanti in ogni suo punto.

Dal teorema di Castigliano si deduce che:

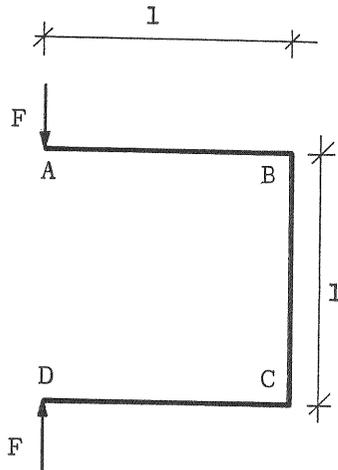
$$\downarrow \delta_{AD}(F) = \frac{dL}{dF}$$

L'espressione del lavoro (dovuto essenzialmente al momento flettente poiché si trascura il contributo dato dallo sforzo assiale) risulta:

$$L = \frac{1}{2} \int_s \frac{M^2 ds}{EJ}$$

ed essendo $M = -Fx$ nel tratto AB , $M = Fl$ nel tratto BC , e $M = Fx$ nel tratto DC , si può scrivere:

$$L = \frac{1}{2} \int_A^B \frac{F^2 x^2}{EJ} dx + \frac{1}{2} \int_C^B \frac{Fl}{EJ} dy + \frac{1}{2} \int_B^C \frac{F^2 x^2}{EJ} dx$$



da cui, integrando:

$$L = \frac{F^3 l^2}{3EJ} + \frac{F^2 l^3}{2EJ}$$

e derivando rispetto alla forza F :

$$\frac{dL}{dF} = \frac{5Fl^2}{3EJ}$$

che è il valore della deformazione cercata.

Usando il teorema di Betti avremmo invece scritto:

$$\downarrow \delta_{AD}(F) = \int_s MM' ds$$

dove M è il momento dovuto alle forze esterne e M' dovuto alle forze unitarie applicate in A e D nella direzione e nel verso di F (v. figura).

La quantità MM' vale:

$$\text{in } AB \quad MM' = Fx^2$$

$$\text{in } BC \quad MM' = Fl^2$$

$$\text{in } DC \quad MM' = Fx^2$$

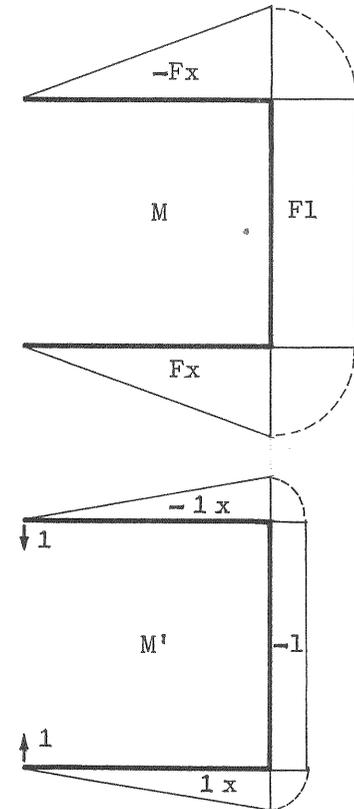
per cui l'espressione degli spostamenti risulta:

$$\downarrow \delta_{AD}(F) = 2 \int_0^l \frac{Fx^2}{EJ} dx + \int_0^l \frac{Fl^2}{EJ} dy$$

$$\downarrow \delta_{AD}(F) = \frac{2Fl^3}{3EJ} + \frac{Fl^3}{EJ}$$

e quindi:

$$\downarrow \delta_{AD}(F) = \frac{5Fl^3}{3EJ}$$



(1) V. O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, pag. 137.

Esercizio 27

Data una trave iperstatica scarica incernierata agli estremi A e B, riscaldata con un aumento uniforme della temperatura Δt , trovare le forze che si sviluppano nei vincoli.

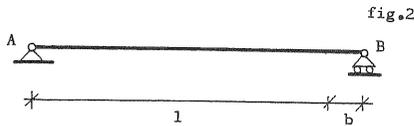
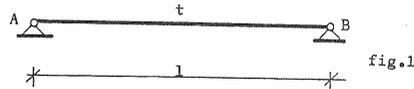
E' intuitivo che la trave, tendendo a dilatarsi a causa dell'aumento di temperatura, spingerà con una forza orizzontale sui vincoli.

Questo accade perché la trave è iperstatica: se infatti in B ci fosse un carrello la trave sarebbe libera di dilatarsi (fig. 2) e non avremmo stati di tensione dovuti ad aumento di temperatura (coazione termica) (1).

Svincoliamo allora la trave e rendiamola isostatica degradando la cerniera B in carrello e sostituendo (come al solito) il vincolo tolto con la reazione incognita X_b .

Dovremo scrivere che per effetto dell'aumento di temperatura Δt e della reazione X_b il punto B non si sposta (fig. 3):

$$\rightarrow \delta_b(\Delta t, x) = 0$$



Questa relazione può essere scritta in altra forma considerando che l'aumento di temperatura provoca uno spostamento $\delta_b(\Delta t)$ verso destra che deve essere annullato da uno spostamento uguale e contrario dovuto ad X_b verso sinistra.

$$\leftarrow \delta_b(X_b) = \rightarrow \delta_b(\Delta t)$$

Ora è noto dalla fisica che l'allungamento di una barra è proporzionale alla lunghezza l , all'aumento di temperatura Δt e a un coefficiente α di dilatazione lineare caratteristico del materiale:

$$\rightarrow \delta_b(\Delta t) = \alpha l \Delta t$$

mentre si sa che l'accorciamento di un'asta compressa da una forza X_b è:

$$\leftarrow \delta_b(X_b) = \frac{X_b l}{EA}$$

(1) V. A. GIANNELLI, *Scienza delle Costruzioni*, pag. 203 e seg.

Uguagliando le due quantità si ottiene:

$$\frac{X_b l}{EA} = \alpha l \Delta t$$

da cui:

$$X_b = EA\alpha\Delta t$$

Lo stesso ragionamento vale per strutture più complesse, con la differenza che può essere meno semplice calcolare lo spostamento dovuto all'incognita iperstatica (in tale caso si ricorre al teorema di Betti o ad altri teoremi sul lavoro di deformazione).

Dato ad esempio l'arco scarico a due cerniere in figura 4), sottoposto ad aumento uniforme di temperatura Δt , sostituiremo alla cerniera B un carrello introducendo l'incognita iperstatica X_b (fig. 5) e scriveremo la relazione già nota:

$$\leftarrow \delta_b(X_b) = \rightarrow \delta_b(\Delta t)$$

dove:

$$\rightarrow \delta_b(\Delta t) = \alpha l \Delta t$$

mentre lo spostamento di B dovuto alla forza incognita X_b può essere calcolato con Betti:

$$\leftarrow \delta_b(X_b) = \int_s MM' d\omega$$

dove M è il momento dovuto alla forza incognita X_b e M' il momento dovuto alla forza unitaria applicata in B nella direzione dello spostamento.

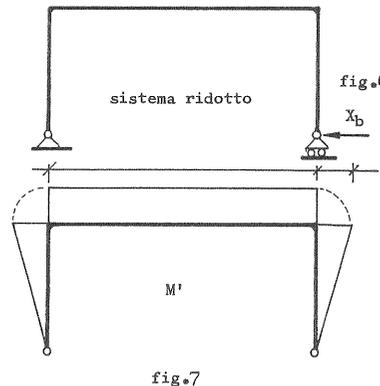
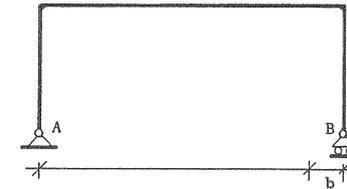
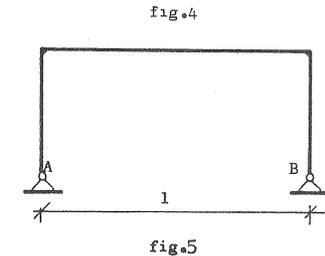
Notando che il momento M dovuto a X_b è X_b volte il momento dovuto alla forza unitaria M' si ha:

$$\begin{aligned} M &= X_b M' \\ \leftarrow \delta_b(X_b) &= X_b \int_s M'^2 d\omega \end{aligned}$$

da cui, uguagliando le due deformazioni (dovute a Δt e a X_b) si ha:

$$\begin{aligned} X_b \int_s M'^2 d\omega &= \alpha l \Delta t \\ X_b &= \frac{\alpha l \Delta t}{\int_s M'^2 d\omega} \end{aligned}$$

Il diagramma di M' è quello in figura 7).



BIBLIOGRAFIA

- O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I e II, Zanichelli, Bologna 1941.
- A. GIANNELLI, *Scienza delle Costruzioni*, edizioni dell'Ateneo, Roma, 1946.
- C. CERADINI, *Meccanica applicata alle Costruzioni*, Vallardi, Milano, 1921.
- G. COLONNETTI, *La Statica delle Costruzioni*, UTET, Torino, 1928.
- V. FEODOSYEV, *Strength of Materials*, MIR, Mosca, 1968.
- R. KINASOSHVILI, *Strength of materials*, MIR, Mosca, 1972.
- A. DARKOV, V. KOUZNETSOV, *Cours de Mecanique des Constructions*, Editions de Moscou, Mosca, 1968.
- S. THIMOSHENKO, *Engeneering Mechanics, Static*, New York, 1937.
- E. GIANGRECO, *Esercizi di Scienza delle Costruzioni*, Liguori, Napoli, 1956.
- L. F. DONATO, *Lezioni di Costruzioni, Parte seconda, Costruzioni Metalliche*, Corsi, Pisa, 1956.
- K. MUKANOV, *Design of Metal Structures*, MIR, Mosca, 1968.